ФГОС

А. Г. МОРДКОВИЧ

Алгебра

1 кисәк

ДӘРЕСЛЕК

8

$y = ax^2 + bx + c$

$\pi \approx 3{,}141592\ldots$

$ax^2 + bx + c = 0$

$N \subset Z,\ Z \subset Q,\ Q \subset R$

$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

$\rho(a; b) = |a - b|$

$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

ТаРИХ

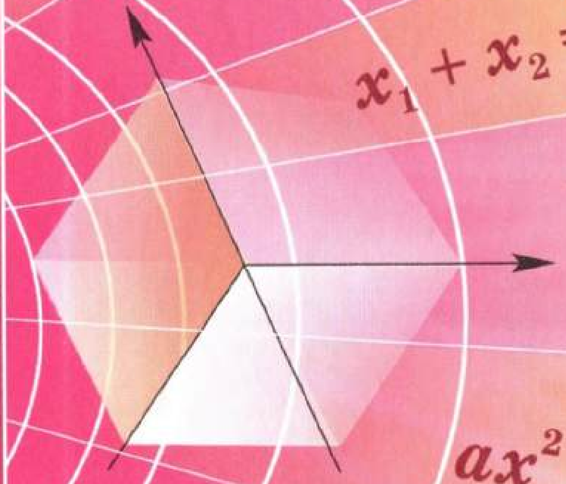
ИЗДАТЕЛЬСТВО МНЕМОЗИНА

А. Г. МОРДКОВИЧ
Алгебра • 1 кисәк • дәреслек
8

$$ax^2+bx+c=0$$

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a},\quad x_1x_2=\frac{c}{a}$$



$$ax^2+2kx+c=0$$

$$x_{1,2}=\frac{-k\pm\sqrt{k^2-ac}}{a}$$

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$$

$$\sqrt{a}=b \Leftrightarrow \begin{cases} a \geqslant 0, \\ b \geqslant 0, \\ b^2=a \end{cases}$$

$$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b} \quad (a \geqslant 0;\ b \geqslant 0)$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \quad (a \geqslant 0;\ b > 0)$$

$$\sqrt{a^{2n}}=a^n \quad (a \geqslant 0)$$

$$\sqrt{a^2}=|a|$$

А. Г. МОРДКОВИЧ

Алгебра

8 сыйныф

Ике кисәктә

1 кисәк

Гомуми белем бирү учреждениеләре өчен

ДӘРЕСЛЕК

Россия Федерациясе Мәгариф һәм фән министрлыгы тарафыннан тәкъдим ителгән

ИЗДАТЕЛЬСТВО МНЕМОЗИНА

Москва · 2012

Казан · 2013

ТаРИХ

УДК 373.167.1:512
ББК 22.141я721
М79

Мордкович А.Г.

М79 Алгебра. 8 класс. В 2 ч. Ч. 1. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений / А. Г. Мордкович. — 14-е изд., испр. — М. : Мнемозина, 2012. — 215 с. : ил.
ISBN 978-5-346-02020-2

Мордкович А.Г.

М79 Алгебра. 8 нче сыйныф. Ике кисәктән. 1 нче кисәк. Гомуми белем бирү учреждениеләре өчен д-лек / А. Г. Мордкович. — Русчадан **Р.С.Вафина** тәрж.— ҖЧҖ «Татарстан Республикасы «ХӘТЕР» нәшрияты», 2013.— 215 б. : ил.
ISBN 978-5-94113-421-2

Әлеге дәреслек гомуми белем мәктәбе өчен гамәлдә булган программаларга туры китереп язылган. Материал тулы һәм аңлаешлы итеп бирелгәнлектән, аны мөстәкыйль өйрәнү өчен дә файдаланырга мөмкин. Дәреслекнең иң мөһим эчтәлек-методик нигезе — аның функциональ-график юнәлешле булуы, ә концепциясенең идея терәге — математик модель һәм математика теле.

УДК 373.167.1:512
ББК 22.141я721

ISBN 978-5-346-02020-2 (ч. 1)
ISBN 978-5-346-02019-6 (общ.)
ISBN 978-5-94113-421-2

© «Мнемозина», 1998
© «Мнемозина», 2012, с изменениями
© Оформление. «Мнемозина», 2012
Все права защищены
© Татарчага тәрҗемә, Татарстан Республикасы «ХӘТЕР» нәшрияты, 2013

УКЫТУЧЫ ӨЧЕН КЕРЕШ СҮЗ

«Мнемозина» нәшрияты тарафыннан гомуми белем бирү мәктәбенең 8 нче сыйныфында алгебра курсын укыту өчен чыгарыла торган укыту-методик комплект* составына түбәндәге китаплар керә:

Программы. Математика. 5–6 классы. Алгебра. 7–9 классы. Алгебра и начала математического анализа. 10–11 классы / авт.-сост. И. И. Зубарева, А. Г. Мордкович;

А. Г. Мордкович. Алгебра. 8 класс. В 2 ч. Ч. 1. Учебник;

А. Г. Мордкович и др. Алгебра. 8 класс. В 2 ч. Ч. 2. Задачник;

А. Г. Мордкович. Алгебра. 8 класс. Методическое пособие для учителя;

Л. А. Александрова. Алгебра. 8 класс. Контрольные работы / Под ред. А. Г. Мордковича;

Л. А. Александрова. Алгебра. 8 класс. Тематические проверочные работы в новой форме / Под ред. А. Г. Мордковича;

Л. А. Александрова. Алгебра. 8 класс. Самостоятельные работы / Под ред. А. Г. Мордковича;

Е. Е. Тульчинская. Алгебра. 8 класс. Блицопрос;

В. В. Шеломовский. Электронное сопровождение курса «Алгебра-8» / Под ред. А. Г. Мордковича.

8 нче сыйныфта алгебра курсын өйрәнү өчен укучыларда ике китап: дәреслек һәм мәсьәләләр җыентыгы булырга тиеш. Сезнең кулыгызда әлеге комплектның беренче китабы** — дәреслек. Автор аны укытучылар да, укучылар да, ата-аналар да укырлар дип ышанып кала, чөнки ул һәркем аңларлык җиңел телдә, математиканың коры лексикасына хас булмаган үзгәрәк сөйләм элементларын да кулланып язылды. Шул ук вакытта фикер йөртүләрнең төп этапларын аерып алып, укучының игътибарын шунда юнәлтеп күрсәтелде. Мәсәлән, барлык текстлы

* УМК турында тулырак мәгълүматны www.mnemozina.ru һәм www/ziimag.narod.ru сайтларыннан табарга мөмкин.

** Дәреслек һәм мәсьәләләр җыентыгы гына татар теленә тәрҗемә ителгән *(ред.)*.

мәсьәләләрнең дә диярлек чишелешләре өч этапка бүлеп бирелде: математик модель төзү; төзелгән модель буенча эш; мәсьәләнең соравына җавап.

Математика дәресләрендә укытучы гадәти сөйләм теле (аралашу теле, әдәби хикәяләү теле) белән фәнни — математикада кабул ителгән законнарга нигезләнгән коры, катгый, кыска һәм төгәл телне бергә кушып сөйли. Бу дәреслек тә нәкъ менә шулай, күбесенчә уку һәм аңлау өчен язылды.

Дәреслеккә таянып, укытучы нәрсәне укучыларга дәрестә сөйләргә, нәрсәне истә калдыру өчен, ә нәрсәне өйдә генә укып чыгу (бәлки, алдагы дәрестә әңгәмә формасында гына аңлашу) өчен тәкъдим итәргә кирәген бик яхшы төшенәчәк.

Мөмкин булган һәр урында автор проблемалы укыту идеяләренә тугры калырга тырышты. Проблема (киңрәк мәгънәдә) — ул без бүген хәл итә алмаган һәм иртәгә дә хәл итә алмый торган әйбер; ул безне байтак вакытлар газаплый, акрынлап без аны чишүгә якынаябыз, хәтта моны сизәбез дә; һәм, ниһаять, аны тулысынча хәл итеп, без чынчынлап рухи күтәренкелек тоябыз.

Дәреслек өстендә эшләгәндә, автор проблемалы укытуга нәкъ менә шулай (локаль түгел, ә глобаль) аңлап якын килде. Мисалларны күпләп китереп була, әмма игътибарлы укучы (һәм, билгеле инде, математика укытучысы) моны үзе күрәчәк һәм аңлаячак.

Бары тик иң гади төшенчәләр генә әзер килеш бирелә, калганнары исә акрынлап, төзәтмәләр һәм өстәмәләр белән кертелә, кайберләре, аларга төгәл билгеләмә бирү өчен иң уңайлы мизгел килеп җиткәнче, интуиция дәрәҗәсендә генә кабул ителә. Шундый төшенчәләрдән, мәсәлән, функцияне күрсәтергә мөмкин, авторның тирәнтен инануы буенча, аны башта ук кертергә кирәкми, ул «өлгереп җитәргә» тиеш. Һич югында, бу дәреслектә (безнең 7 нче сыйныф дәреслегендәге кебек үк) функциянең төгәл билгеләмәсе юк, ул алгебраның 9 нчы сыйныф курсында биреләчәк.

Дәреслек өстендә эшләгәндә, автор үзенең төп бурычы — математик фактларны санап чыгу түгел, ә укучыларны фән эчендә үстерү икәнлеген яхшы аңлап эш итте. Башка сүзләр белән әйткәндә, курста өстенлек мәгълүмат күплегенә түгел, ә аның үстерү сәләтенә бирелде. Дәреслектә үстерешле укытуның Л. В. Занков тарафыннан билгеләнгән барлык принциплары да гамәлдә: югары авырлык дәрәҗәсендә укыту; программа темаларын шактый кызу үтү; теоретик белемнәрнең әйдәп баручы роле; укыту процессын бәяләү (укучы материалны өйрәнү барышында үзенең акыллылана баруын күрергә тиеш); барлык укучыларны да үстерү (билгеле, аларның шәхси мөмкинлекләрен исәпкә алып).

Һәр бүлек «Төп нәтиҗәләр» дигән бүлекчә белән тәмамлана. Бу — үзенә күрә казанышлар күргәзмәсе, йомгак ясау, укучының үз-үзенә бәясе. Укыту процессын уңышлы итү өчен бу бик мөһим дип саныйбыз.

Тагын шунысына игътибар итегез, «Иррациональ тигезләмәләр» дигән 30 нчы параграф * тамгасы белән бирелде. Яңа стандарт буенча бу тема төп мәктәп курсында өйрәнелми. Шулай да автор, гомумиләштерүче кабатлау вакытында яхшы материал буларак, аны дәреслектә калдыру мөмкин дип саный.

Дәреслеккә һәм мәсьәләләр җыентыгына махсус электрон кулланма (авторы В. В. Шеломовский) эшләнде, ул 8 нче сыйныф укучыларына — уку материалын мөстәкыйль рәвештә өйдә өйрәнергә булышса, укытучыларга дәрестә укыту процессын оештырырга ярдәм итәчәк. Кулланмада китерелгән берничә йөз интерактив рәсем графиклар төзү, тигезләмәләр һәм мәсьәләләр чишү турындагы белемнәрне ныгытачак.

Автор

Китап белән эшләргә өйрәнегез

Дәреслекнең һәр битендә диярлек тамга-символлар бар.

Бу символларны кертүнең максаты — укучыларга уку материалын үзләштерергә һәм ныгытырга ярдәм итүдән; укытучыларга — укучыларында өйрәнелә торган материал буйлап тиз ориентлашу күнекмәләре тәрбияләүдә, ата-аналарга балаларның белемнәрен дөрес контрольдә тотуда булышудан гыйбарәт.

Редакциядән

▣ — мисал чишелешенең тәмамлануы
(«җавап» сүзе булмаган очрак)

1 БҮЛЕК

АЛГЕБРАИК ВАКЛАНМАЛАР

§ 1. *Төп төшенчәләр*

§ 2. *Алгебраик вакланманың төп үзлеге*

§ 3. *Ваклаучылары бертөрле булган алгебраик вакланмаларны кушу һәм алу*

§ 4. *Ваклаучылары төрле булган алгебраик вакланмаларны кушу һәм алу*

§ 5. *Алгебраик вакланмаларны тапкырлау һәм бүлү. Алгебраик вакланманы дәрәҗәгә күтәрү*

§ 6. *Рациональ аңлатмаларны рәвешүзгәртү*

§ 7. *Рациональ тигезләмәләр чишү турында беренче күзаллаулар*

§ 8. *Тискәре бөтен күрсәткечле дәрәҗә*

§1. ТӨП ТӨШЕНЧӘЛӘР

Алгебраик вакланма төшенчәсе сезгә инде 7 нче сыйныф алгебра курсыннан таныш, без анда алгебраик вакланмаларны кыскартуга зур урын биргән идек. Хәзер исә алгебраик вакланмалар теориясен махсус өйрәнергә вакыт җитте.

Билгеләмә. **Алгебраик вакланма** дип $\frac{P}{Q}$ рәвешендәге аңлатманы атыйлар, биредә P һәм Q — күпбуыннар; P — **алгебраик вакланманың санаучысы, Q — алгебраик вакланманың ваклаучысы.**

Алгебраик вакланмаларга мисаллар:

$$\frac{x+y}{x-y},\quad \frac{x^3+1}{x^2-x+2},\quad \frac{a^2-4}{a+2},\quad \frac{a}{2},\quad \frac{3a+7}{5}.$$

Күпбуынны алгебраик вакланманың аерым очрагы дип карарга мөмкин. Мәсәлән, $2x^2 + 5x + 3$ күпбуынын $\frac{2x^2 + 5x + 3}{1}$ вакланмасы рәвешендә язарга, ә $\frac{3a + 7}{5}$ вакланмасын $\frac{3}{5}a + \frac{7}{5}$ күпбуыны (икебуыны) рәвешендә күрсәтергә мөмкин. 7 нче биттәге өченче мисалда да кыскартудан соң $a - 2$ килеп чыга. Ләкин чынлыкта бу бик әһәмиятле түгел, гади вакланмаларда да шул ук хәл иде бит. Әйтик, $\frac{10}{5}$ *формасы буенча* — гади вакланма, ә *эчтәлеге буенча* — натураль 2 саны.

1 нче мисал. Алгебраик вакланманың кыйммәтен табарга:

$$\frac{a^2 + 2ab + b^2}{(a + b)(a - b)},$$

биредә: а) $a = 2$, $b = 1$; б) $a = 5$, $b = 0$; в) $a = 4$, $b = 4$.

Чишү. а) $a = 2$, $b = 1$ булганда табабыз:

$$\frac{a^2 + 2ab + b^2}{(a + b)(a - b)} = \frac{2^2 + 2 \cdot 2 \cdot 1 + 1^2}{(2 + 1)(2 - 1)} = \frac{4 + 4 + 1}{3 \cdot 1} = \mathbf{3}.$$

б) $a = 5$, $b = 0$ булганда табабыз:

$$\frac{a^2 + 2ab + b^2}{(a + b)(a - b)} = \frac{5^2 + 2 \cdot 5 \cdot 0 + 0^2}{(5 + 0)(5 - 0)} = \frac{25 + 0 + 0}{5 \cdot 5} = \frac{25}{25} = \mathbf{1}.$$

в) $a = 4$, $b = 4$ булганда $a - b$ аңлатмасы нульгә әйләнә, шунлыктан бу вакланманың ваклаучысы да нульгә әйләнә. Әмма *нульгә бүләргә ярамый.* Димәк, $a = 4$, $b = 4$ кыйммәтләр парын бирелгән вакланмага куярга ярамый, ягъни алгебраик вакланманың бу очракта *мәгънәсе булмый.*

Киләчәктә алгебраик вакланма составына кергән үзгәрешлеләр бары тик **мөмкин табылган** кыйммәтләр, ягъни вакланманың ваклаучысын нульгә әйләндерми торган кыйммәтләр генә ала дип килешербез.

Сүзлекчә

алгебраик вакланма

санаучы

ваклаучы

мөмкин табылган кыйммәтләр

Искәрмә. 1 нче мисал дөрес чишелде, әмма «культуралы түгел». Ә бит $\frac{a^2+2ab+b^2}{(a+b)(a-b)}$ алгебраик вакланмасын кыскартырга мөмкин. Исегезгә төшерәбез, без 7 нче сыйныфта болай эшли идек:

$$\frac{a^2+2ab+b^2}{(a+b)(a-b)} = \frac{(a+b)^2}{(a+b)(a-b)} = \frac{a+b}{a-b}.$$

Үзегез дә килешәсездер, әгәр без эшне вакланманы кыскартудан башласак, исәпләүләр сизелерлек гадиләшер иде. Шуңа күрә математикларда бу инде рефлекс дәрәҗәсенә җиткән: аларга алгебраик вакланма очрау белән, аны кыскарту юлларын эзли башлыйлар.

2 нче мисал. Көймә, елга агымы уңаена 10 км һәм агымга каршы 6 км үтеп, барысы 2 сәг вакыт сарыф иткән. Әгәр елганың агым тизлеге 2 км/сәг булса, көйләнең үз тизлеген табыгыз.

Чишү.

Беренче этап. *Математик модель төзү.*

Әйтик, x – көймәнең үз тизлеге булсын, ул вакытта көймә агым уңаена $(x + 2)$ км/сәг, ә агымга каршы $(x - 2)$ км/сәг тизлек белән бара.

Агым уңаена, ягъни $(x + 2)$ км/сәг тизлек белән көймә 10 км бара. Димәк, бу юлга киткән вакыт $\frac{10}{x+2}$ сәг формуласы белән күрсәтелә.

Агымга каршы, ягъни $(x - 2)$ км/сәг тизлек белән көймә 6 км юл үтә. Димәк, бу юлга ул $\frac{6}{x-2}$ сәг вакыт сарыф итә.

Мәсьәләнең шарты буенча, барлык юлга (агым уңаена 10 км һәм агымга каршы 6 км) барысы 2 сәг вакыт китә. Димәк,

$$\frac{10}{x+2} + \frac{6}{x-2} = 2.$$

Төзелгән тигезләмә — мәсьәләнең математик моделе.

<u>Икенче этап</u>. *Төзелгән модель белән эш.*

Тигезләмәнең сул ягына игътибар итегез. Ул алгебраик вакланмалар суммасыннан гыйбарәт. Шулай итеп, түбәндәге нәтиҗәләргә килдек:

1) алгебраик вакланмалар теге яки бу математик модель составына керергә мөмкиннәр;

2) алгебраик вакланмалар белән эшләргә, аерым алганда, $\frac{10}{x+2}$ һәм $\frac{6}{x-2}$ вакланмаларын кушарга өйрәнергә кирәк;

3) алгебраик вакланмалар белән эшләргә өйрәнмичә торып, төзелгән модель белән эшләү этабын башкара алмыйбыз.

Без бу мәсьәләгә соңрак, аны ахыргача җиткерергә өйрәнгәч кенә кире әйләнеп кайтырбыз (§ 7 та).

Шулай итеп, сез хәзер алгебраик вакланмаларның һәм алар белән эшләргә өйрәнүнең кирәклегенә ышандыгыз. Без моның белән алдагы параграфларда шөгыльләнербез.

§2. АЛГЕБРАИК ВАКЛАНМАНЫҢ ТӨП ҮЗЛЕГЕ

Гади вакланманың санаучысын да, ваклаучысын да нульгә тигез булмаган бер үк санга тапкырлаудан яки бүлүдән бу вакланманың кыйммәте үзгәрмәвен сез инде беләсез. Мәсәлән:

$\frac{3}{5}=\frac{12}{20}$ (санаучыны да, ваклаучыны да бер үк вакытта бер үк 4 санына тапкырладык; вакланманың кыйммәте үзгәрмәде);

$\frac{22}{33}=\frac{2}{3}$ (санаучыны да, ваклаучыны да бер үк вакытта бер үк 11 санына бүлдек; вакланманың кыйммәте үзгәрмәде).

игътибар итегез

Алгебраик вакланма — күпмедер дәрәҗәдә гади вакланманы гомумиләштерү ул; алгебраик вакланмалар белән без әле генә гади вакланмалар өчен күрсәткәннәргә охшаган рәвешүзгәртүләр ясарга мөмкин.

1. *Алгебраик вакланманың санаучысын да, ваклаучысын да бер үк күпбуынга (аерым алганда, бер үк бербуынга, нульгә тигез булмаган бер үк санга) тапкырларга мөмкин*; бу — бирелгән алгебраик вакланманы бердәй рәвешүзгәртү.

2. *Алгебраик вакланманың санаучысын да, ваклаучысын да, әгәр бүлү гамәле мөмкин булса, бер үк күпбуынга (аерым алганда, бер үк бербуынга, нульгә тигез булмаган бер үк санга) бүлергә мөмкин*; бу — бирелгән алгебраик вакланманы бердәй рәвешүзгәртү, аны алгебраик вакланманы **кыскарту** дип атыйлар.

Алда әйтелгән кагыйдәләр **алгебраик вакланманың төп үзлеге** була да инде.

Алгебраик вакланманың төп үзлеген кулланып, әгәр шундый зарурлык туса, $\frac{x}{x-1}$ вакланмасын $\frac{x(x-2)}{(x-1)(x-2)}$ вакланмасына ($\frac{x}{x-1}$ вакланмасының санаучысын да, ваклаучысын да $x-2$ гә бер үк вакытта тапкырладык) яки $\frac{2x^2}{2x(x-1)}$ вакланмасына (вакланманың санаучысын да, ваклаучысын да бер үк вакытта $2x$ ка тапкырладык) алыштырырга мөмкин. Алгебраик вакланманың төп үзлегеннән файдаланып, $\frac{2x^2}{2x(x-1)}$ вакланмасын гадирәк $\frac{x}{x-1}$ вакланмасы белән алыштырырга була (санаучыны да, ваклаучыны да бер үк вакытта $2x$ ка бүлдек, ягъни вакланманы кыскарттык).

Мисал. Бирелгән вакланмаларны ваклаучылары бер үк төрле вакланмалар килеп чыгарлык итеп үзгәртергә:

а) $\frac{a}{4b^2}$ һәм $\frac{a^2}{6b^3}$; б) $\frac{x}{x+y}$ һәм $\frac{x}{x-y}$.

Чишү.

а) $\frac{a}{4b^2} = \frac{a \cdot 3b}{4b^2 \cdot 3b} = \frac{3ab}{12b^3}$;

$$\frac{a^2}{6b^3} = \frac{a^2 \cdot 2}{6b^3 \cdot 2} = \frac{2a^2}{12b^3}.$$

Вакланмалар бер үк төрле ваклаучыга («уртак ваклаучыга» дип әйтәләр) китерелде. Моның өчен беренче вакланманың санаучысын да, ваклаучысын да — өстәмә $3b$ тапкырлаучысына, икенче вакланманың санаучысын да, ваклаучысын да өстәмә 2 тапкырлаучысына тапкырладык; вакланманың төп үзлеге моны эшләргә мөмкинлек бирә.

б) $\frac{x}{x+y} = \frac{x(x-y)}{(x+y)(x-y)} = \frac{x^2-xy}{x^2-y^2}$;

$$\frac{x}{x-y} = \frac{x(x+y)}{(x-y)(x+y)} = \frac{x^2+xy}{x^2-y^2}.$$

Вакланмалар өстәмә тапкырлаучылар — тиңдәшле рәвештә $x - y$ һәм $x + y$ ярдәмендә $x^2 - y^2$ уртак ваклаучысына китерелде. ◼

Бу мисалда алгебраик вакланмаларны уртак ваклаучыга бердәй тигез булган икенче алгебраик вакланма белән алыштырдык.

Вакланманы кыскартканда, без аны гадиләштерсәк, бу мисалда исә һәр вакланма катлаулырагы белән алыштырылды. Сездә, бәлки, мондый «катлауландыручы» рәвешүзгәртү нигә кирәк икән дигән сорау да тугандыр.

Кайвакыт анысы да кирәк икән, тиздән без моңа ышаначакбыз.

Санаучы һәм ваклаучының тамгаларын үзгәртү кагыйдәләре алгебраик вакланманың төп үзлеге белән бәйләнгән. Түбәндәге тигезлек дөрес була:

$$\frac{a-b}{c-d}=\frac{b-a}{d-c},$$

биредә без беренче вакланманың санаучысын һәм ваклаучысын бер үк вакытта бер үк –1 санына тапкырладык.

игътибар итегез

Әгәр тамгаларны бары санаучыда гына яки бары ваклаучыда гына үзгәртергә кирәк булса, вакланма алдындагы тамганы үзгәртергә кирәк:

$$\frac{a-b}{c-d}=\frac{-(b-a)}{c-d}=-\frac{b-a}{c-d};$$

$$\frac{a-b}{c-d}=\frac{a-b}{-(d-c)}=-\frac{a-b}{d-c}.$$

§3. ВАКЛАУЧЫЛАРЫ БЕРТӨРЛЕ БУЛГАН АЛГЕБРАИК ВАКЛАНМАЛАРНЫ КУШУ ҺӘМ АЛУ

Ваклаучылары бертөрле булган алгебраик вакланмаларны гади вакланмалардагы кагыйдәләр буенча кушалар һәм алалар:

$$\frac{a}{d}+\frac{b}{d}-\frac{c}{d}=\frac{a+b-c}{d},$$

ягъни санаучыларның алгебраик суммасын төзиләр, ә ваклаучыны үзгәрешсез калдыралар.

Мисал. Гамәлләрне эшләргә:

$$\frac{2a^2+5}{a^2-ab}+\frac{2ab+b}{a^2-ab}-\frac{b+5}{a^2-ab}.$$

Чишү. Алгебраик вакланмаларны кушу һәм алу кагыйдәсен кулланып табабыз:

$$\frac{2a^2+5}{a^2-ab}+\frac{2ab+b}{a^2-ab}-\frac{b+5}{a^2-ab}=\frac{(2a^2+5)+(2ab+b)-(b+5)}{a^2-ab}.$$

Хәзер күпбуыннар белән тиешле гамәлләрне эшләп, санаучыны гадиләштерергә мөмкин:

$$(2a^2+5)+(2ab+b)-(b+5)=$$
$$=2a^2+5+2ab+b-b-5=2a^2+2ab.$$

Шулай итеп, бирелгән өч вакланманың алгебраик суммасын без $\frac{2a^2+2ab}{a^2-ab}$ вакланмасына үзгәрттек.

Ә хәзер үткән параграфта әйтелгәнне искә төшерегез: алгебраик вакланма бирелсә, аны кыскартып булу мөмкинлеген карарга кирәк. Мөмкин булып чыкты:

$$\frac{2a^2+2ab}{a^2-ab}=\frac{2a(a+b)}{a(a-b)}=\frac{2(a+b)}{a-b}=\frac{2a+2b}{a-b}.$$ ▣

Хәзер тикшерелгән мисалның чишелешен аңлатуларсыз гына язарбыз (сез дәфтәрләрегездә эшләгән кебек):

$$\frac{2a^2+5}{a^2-ab}+\frac{2ab+b}{a^2-ab}-\frac{b+5}{a^2-ab}=\frac{(2a^2+5)+(2ab+b)-(b+5)}{a^2-ab}=$$

$$=\frac{2a^2+5+2ab+b-b-5}{a^2-ab}=\frac{2a^2+2ab}{a^2-ab}=\frac{2a(a+b)}{a(a-b)}=$$

$$=\frac{2(a+b)}{a-b}=\frac{2a+2b}{a-b}.$$

Күргәнегезчә, рәвешүзгәртүләр нәтиҗәсендә мисалның шартында бирелгәннән күпкә гадирәк алгебраик аңлатма килеп чыга. Рәвешүзгәртүләрнең максаты — нәкъ менә гадиләштерү дә инде, шуңа күрә «гамәлләрне эшләргә» дигән сүзтезмә урынына күбрәк «аңлатманы гадиләштерергә» дигәне кулланыла. Шунысын искәртик, эшләнгән рәвешүзгәртүләр үзгәрешлеләрнең мөмкин табылган кыйммәтләре: $a \neq 0, a \neq b$ өчен генә законлы.

§ 4. ВАКЛАУЧЫЛАРЫ ТӨРЛЕ БУЛГАН АЛГЕБРАИК ВАКЛАНМАЛАРНЫ КУШУ ҺӘМ АЛУ

Ваклаучылары төрле булган алгебраик вакланмаларны кушу һәм алу да төрле ваклаучылы гади вакланмаларны кушу һәм алуда кулланыла торган алгоритм буенча эшләнә: башта вакланмаларны тиңдәшле өстәмә тапкырлаучылар ярдәмендә уртак ваклаучыга китерәләр, ә аннан соң килеп чыккан ваклаучылары бертөрле вакланмаларны § 3 тагы кагыйдә буенча кушалар яки алалар. Алгебраик вакланмаларны кушуның (алуның) теләсә нинди очракларын үз эченә алган алгоритм формалаштырырга мөмкин:

Алгебраик вакланмаларны кушу (алу) алгоритмы

1. Вакланмаларны уртак ваклаучыга китерергә; әгәр аларның ваклаучылары башта ук бертөрле булса, алгоритмның бу адымын төшереп калдырырга.
2. Килеп чыккан бертөрле вакланмалы вакланмаларны кушуны (алуны) эшләргә.

1 мисал. Гамәлләрне эшләргә:

а) $\frac{a}{4b^2} + \frac{a^2}{6b^3}$; б) $\frac{x}{x+y} - \frac{x}{x-y}$.

Чишү. Биредә китерелгән алгебраик вакланмаларның һәр пары өчен уртак ваклаучы алдарак, § 2 мисалында табылган иде. Шул мисалның чишелешенә таянып табабыз:

а) $\frac{a}{4b^2} + \frac{a^2}{6b^3} = \frac{3ab}{12b^3} + \frac{2a^2}{12b^3} = \frac{3ab + 2a^2}{12b^3}$;

б) $\frac{x}{x+y} - \frac{x}{x-y} = \frac{x^2 - xy}{x^2 - y^2} - \frac{x^2 + xy}{x^2 - y^2} =$

$$= \frac{(x^2 - xy) - (x^2 + xy)}{x^2 - y^2} = \frac{x^2 - xy - x^2 - xy}{x^2 - y^2} = \frac{-2xy}{x^2 - y^2}.$$ ▣

игътибар итегез

15 нче биттә бирелгән алгоритмда иң кыены — беренче адым: уртак ваклаучыны табу һәм вакланмаларны уртак ваклаучыга китерү. 1 нче мисалда бу кыенлыкны сез сизмәгәнсездер дә, чөнки анда без § 2 тагы әзер нәтиҗәләрдән файдаландык.

Уртак ваклаучы эзләү кагыйдәсен чыгару өчен, 1 нче мисалны анализлап карыйк.

$\frac{a}{4b^2}$ һәм $\frac{a^2}{6b^3}$ вакланмалары өчен уртак ваклаучы — $12b^3$ бербуыны. Ул $4b^2$ ка да, $6b^3$ ка да, ягъни вакланмаларның ваклаучылары булып торучы ике бербуынга да бүленә. Игътибар итегез: 12 саны — 4 һәм 6 саннарының иң кечкенә уртак кабатлысы. Үзгәрешле b беренче вакланманың ваклаучысына 2 күрсәткече белән, икенче вакланма ваклаучысына 3 күрсәткече белән керә. Күрсәткечнең иң зур кыйммәте уртак ваклаучыга алына.

$\frac{x}{x+y}$ һәм $\frac{x}{x-y}$ вакланмалары өчен уртак ваклаучы булып $(x + y)(x - y)$ тапкырчыгышы хезмәт итә, ул $x + y$ ваклаучысына да, $x - y$ ваклаучысына да бүленә.

Уртак ваклаучыны эзләгәндә, билгеле инде, бирелгән барлык ваклаучыларны тапкырлаучыларга таркатырга туры килә (әгәр бу шартта әзерләнмәгән булса). Ә аннан соң эшне этапларга бүлеп алып барырга: санлы коэффициентлар өчен иң кечкенә уртак кабатлыны табарга (бөтен коэффициентлар турында сүз бара), берничә тапкыр очрый торган һәр хәрефле тапкырлаучы өчен иң зур (булганнары арасыннан) дәрәҗә күрсәткечен билгеләргә, барысын да бер тапкырчыгышка җыярга кирәк.

Хәзер тиңдәшле алгоритмны формалаштырырга була.

Берничә алгебраик вакланма өчен уртак ваклаучы эзләү алгоритмы

1. Барлык ваклаучыларны тапкырлаучыларга таркатырга.
2. Беренче адымдагы таркатмаларда булган санлы коэффициентларның иң кечкенә уртак кабатлыларын табарга.
3. Алгоритмның беренче адымындагы таркатмаларда табылган барлык хәрефле тапкырлаучыларны кертеп, тапкырчыгыш төзергә. Әгәр ниндидер тапкырлаучы берничә таркатмага керсә, аны шулар арасындагы иң зур дәрәҗә күрсәткече белән алырга.
4. Өченче адымда табылган тапкырчыгышка икенче адымда табылган санлы коэффициентны өстәргә; нәтиҗәдә уртак ваклаучы табыла.

Алга таба дәвам итү алдыннан, бу алгоритм ярдәмендә 1 нче мисалдагы алгебраик вакланмалар өчен уртак тапкырлаучы табуны нигезләп карагыз.

Искәрмә. Чынлыкта ике алгебраик вакланма өчен бик күп сандагы уртак ваклаучылар табарга була. $\frac{a}{4b^2}$ һәм $\frac{a^2}{6b^3}$ вакланмалары өчен уртак ваклаучы булып, алда табылган $12b^3$ бербуынынннан тыш, $24b^3$ та, $48a^2b^4$ дә булырга мөмкин. $12b^2$ бербуыны $24b^3$ тан яки $48a^2b^4$ нән нәрсәсе белән яхшырак соң? Ул гадирәк (рәвеше белән). Аны кайвакыт *иң кечкенә уртак ваклаучы* дип тә атыйлар. Шулай итеп, алда китерелгән алгоритм — берничә алгебраик вакланманың уртак ваклаучылары арасыннан иң гадиен сайлап алу алгоритмы, *иң кечкенә уртак ваклаучыны табу алгоритмы* ул.

Яңадан 1, а мисалга кайтыйк. $\frac{a}{4b^2}$ һәм $\frac{a^2}{6b^3}$ вакланмалары өчен уртак ваклаучы $3b$ га тигез (чөнки $12b^3 : 4b^2 = 3b$), икенче

вакланма өчен ул 2 (чөнки $12b^3 : 6b^3 = 2$). 1, б мисалының чишелешен болай язарга мөмкин:

$$\frac{a^{\lfloor 3b}}{4b^2} + \frac{a^{2 \lfloor 2}}{6b^3} = \frac{3ab + 2a^2}{12b^3}.$$

Алда без берничә алгебраик вакланма өчен уртак тапкырлаучы табу алгоритмын формалаштырган идек. Әмма тәҗрибә күрсәткәнчә, бу алгоритмны укучылар кайбер очракларда аңлап бетермиләр, шунлыктан аны бераз үзгәртеп бирәбез:

Алгебраик вакланмаларны уртак ваклаучыга китерү алгоритмы

1. Барлык ваклаучыларны тапкырлаучыларга таркатырга.
2. Беренче ваклаучыдан аның барлык тапкырлаучылары тапкырчыгышын язып алырга, калганнарыннан бу тапкырчыгышка җитмәгән тапкырчыгышларны өстәп язарга. Табылган тапкырчыгыш уртак (яңа) ваклаучы була.
3. Бу вакланмаларның һәрберсе өчен өстәмә тапкырлаучылар табарга: болар — иске ваклаучыда булмаган, әмма яңасында булган тапкырлаучыларның тапкырчыгышлары.
4. Һәр вакланма өчен яңа санаучы табарга: бу иске санаучы белән өстәмә тапкырлаучының тапкырчыгышы була.
5. Һәр вакланманы яңа санаучы һәм яңа (уртак) ваклаучы белән язарга.

2 нче мисал. Вакланманы гадиләштеререгә:

$$\frac{3a}{4a^2 - 1} - \frac{a + 1}{2a^2 + a}.$$

Чишү.

<u>Беренче этап</u>. Уртак ваклаучы һәм ике вакланманың һәркайсы өчен өстәмә тапкырлаучы табабыз. Башта ваклаучыларны тапкырлаучыларга таркатабыз:

$$4a^2 - 1 = (2a - 1)(2a + 1),$$
$$2a^2 + a = a(2a + 1).$$

Беренче ваклаучыны тулаем алабыз, ә икенчесеннән беренче ваклаучыда булмаган a тапкырлаучысын өстибез. Уртак ваклаучы табабыз: $a(2a-1)(2a+1)$.

Язмаларны таблица рәвешендә урнаштыру уңай:

Ваклаучылар	Уртак ваклаучы	Өстәмә тапкырлаучылар
$(2a-1)(2a+1)$	$a(2a-1)(2a+1)$	a
$a(2a+1)$		$(2a-1)$

<u>Икенче этап</u>. Рәвешүзгәртүләрне эшлибез:

$$\frac{3a}{4a^2-1}-\frac{a+1}{2a^2+a}=\frac{3a^{\backslash a}}{(2a-1)(2a+1)}-\frac{a+1^{\backslash 2a-1}}{a(2a+1)}=$$

$$=\frac{3a^2-(a+1)(2a-1)}{a(2a-1)(2a+1)}=\frac{3a^2-(2a^2-a+2a-1)}{a(2a-1)(2a+1)}=$$

$$=\frac{3a^2-2a^2+a-2a+1}{a(2a-1)(2a+1)}=\frac{a^2-a+1}{a(2a-1)(2a+1)}.$$ ■

Бераз тәҗрибә туплагач, беренче этапны аерып тормаска, аны икенчесе белән эшләргә дә мөмкин.

Йомгаклап, катлаулырак биремне карап китәрбез.

3 нче мисал. Аңлатманы гадиләштерергә:

$$\frac{b}{2a^4+4a^3b+2a^2b^2}-\frac{1}{3ab^2-3a^3}+\frac{b}{6a^4-6a^3b}.$$

Чишү.

<u>Беренче этап</u>. Барлык ваклаучыларны тапкырлаучыларга таркатабыз:

1) $2a^4+4a^3b+2a^2b^2=2a^2(a^2+2ab+b^2)=2a^2(a+b)^2$;

2) $3ab^2-3a^3=3a(b^2-a^2)=3a(b-a)(b+a)$;

3) $6a^4-6a^3b=6a^3(a-b)$.

Беренче ваклаучыны тулысы белән алабыз, икенчесеннән — җитмәгән 3 һәм $b - a$ (яки $a - b$) тапкырлаучыларын, өченчесеннән җитмәгән a тапкырлаучысын (чөнки өченче ваклаучыда a^3 тапкырлаучысы бар) өстибез.

Ваклаучылар	Уртак ваклаучы	Өстәмә тапкырлаучылар
$2a^2(a + b)^2$ $3a(b - a)(b + a)$ $6a^3(a - b)$	$6a^3(a - b)(a + b)^2$	$3a(a - b)$ $-2a^2(a + b)$ $(a + b)^2$

Өстәмә тапкырлаучыда «−» тамгасы булса, гадәттә, аны вакланма алдына ук куялар, димәк, икенче вакланма алдындагы тамганы үзгәртергә туры килә.

<u>Икенче этап</u>. Рәвешүзгәртүләрне эшлибез:

$$\frac{b}{2a^4 + 4a^3b + 2a^2b^2} - \frac{1}{3ab^2 - 3a^3} + \frac{b}{6a^4 - 6a^3b} =$$

$$= \frac{b^{\backslash 3a(a-b)}}{2a^2(a + b)^2} + \frac{1^{\backslash 2a^2(a+b)}}{3a(a - b)(a + b)} + \frac{b^{\backslash (a+b)^2}}{6a^3(a - b)} =$$

$$= \frac{3ab(a - b) + 2a^2(a + b) + b(a^2 + 2ab + b^2)}{6a^3(a - b)(a + b)^2} =$$

$$= \frac{3a^2b - 3ab^2 + 2a^3 + 2a^2b + a^2b + 2ab^2 + b^3}{6a^3(a - b)(a + b)^2} = \frac{2a^3 + 6a^2b - ab^2 + b^3}{6a^3(a - b)(a + b)^2}.$$

Бу иң соңгы нәтиҗәме? Килеп чыккан алгебраик вакланманы кыскартып булмыймы? $6a^3$ аңлатмасының бүлүчеләре санаучыда юк. Ә бәлки, вакланманы $a - b$ га кыскартып буладыр? Тикшерәбез: әгәр санаучыда $a - b$ тапкырлаучысын аерып алу мөмкин булса, $a = b$ булганда санаучы нульгә әверелер иде. Ә бездә, $a = b$ булганда, санаучы $8b^3$ ка әйләнә. Вакланманы $a + b$ га да кыскартырга ярамый, чөнки $a = -b$ булганда, санаучы нульгә түгел, ә $6b^3$ ка әйләнә.

Искәртеп үтик, 3 нче мисалда бирелгән аңлатманы без исәпләп тапкан алгебраик вакланма белән алыштыру — үзгәрешлеләрнең мөмкин табылган кыйммәтләрендә бердәй рәвешүзгәртү була. Бу очракта a һәм b үзгәрешлеләренең $a = 0$, $a = b$, $a = -b$ дан башка (бу очракларда ваклаучы нульгә әйләнә) барлык кыйммәтләре мөмкин табылган кыйммәтләр була.

§5. АЛГЕБРАИК ВАКЛАНМАЛАРНЫ ТАПКЫРЛАУ ҺӘМ БҮЛҮ. АЛГЕБРАИК ВАКЛАНМАНЫ ДӘРӘҖӘГӘ КҮТӘРҮ

Алгебраик вакланмаларны тапкырлау гади вакланмаларны тапкырлау кагыйдәсе буенча эшләнә:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

Алгебраик вакланмаларны бүлү дә, алгебраик вакланманы натураль күрсәткечле дәрәҗәгә күтәрү дә нәкъ шулай ук эшләнә. Бүлү кагыйдәсе болай языла:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc},$$

ә дәрәҗәгә күтәрү кагыйдәсе түбәндәгечә:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

игътибар итегез

Алгебраик вакланмаларны тапкырлау һәм бүлүне эшләгәнче, санаучыларны һәм ваклаучыларны тапкырлаучыларга таркату файдалы булыр, болай эшләгәндә, тапкырлау яки бүлү нәтиҗәсендә табылган алгебраик вакланманы кыскарту җиңелрәк булачак.

1 нче мисал. Гамәлләрне эшләргә:

а) $\frac{5x + 5y}{x - y} \cdot \frac{x^2 - y^2}{10x}$; б) $\frac{7a^3b^5}{3a - 3b} \cdot \frac{6b^2 - 12ab + 6a^2}{49a^4b^5}$.

Чишү.

а) $$\frac{5x + 5y}{x - y} \cdot \frac{x^2 - y^2}{10x} = \frac{5(x + y)}{x - y} \cdot \frac{(x - y)(x + y)}{10x} =$$

$$= \frac{5(x + y)(x - y)(x + y)}{(x - y) \cdot 10x} = \frac{(x + y)^2}{2x};$$

б) $\frac{7a^3b^5}{3a-3b}\cdot\frac{6b^2-12ab+6a^2}{49a^4b^5}=\frac{7a^3b^5}{3(a-b)}\cdot\frac{6(b^2-2ab+a^2)}{49a^4b^5}=$

$=\frac{7a^3b^5\cdot 6(b-a)^2}{3(a-b)\cdot 49a^4b^5}=\frac{2(b-a)^2}{7a(a-b)}.$

$(b-a)^2=(a-b)^2$ булганлыктан:

$$\frac{2(b-a)^2}{7a(a-b)}=\frac{2(a-b)^2}{7a(a-b)}=\frac{2(a-b)}{7a}.$$ ■

2 нче мисал. Гамәлләрне эшләргә:

а) $\frac{x^3-1}{8y}:\frac{x^2+x+1}{16y^2}$; б) $\frac{a^4-b^4}{ab+2b-3a-6}:\frac{b-a}{a+2}$.

Чишү.

а) $\frac{x^3-1}{8y}:\frac{x^2+x+1}{16y^2}=\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{8y}:\frac{x^2+x+1}{16y^2}=$

$=\frac{(x-1)(x^2+x+1)\cdot 16y^2}{8y\cdot(x^2+x+1)}=(x-1)2y=2xy-2y;$

б) $\frac{a^4-b^4}{ab+2b-3a-6}:\frac{b-a}{a+2}=\frac{(a^2-b^2)(a^2+b^2)}{(ab+2b)-(3a+6)}:\frac{b-a}{a+2}=$

$=\frac{(a-b)(a+b)(a^2+b^2)}{b(a+2)-3(a+2)}:\frac{b-a}{a+2}=\frac{(a-b)(a+b)(a^2+b^2)}{(a+2)(b-3)}:\frac{b-a}{a+2}=$

$=\frac{(a-b)(a+b)(a^2+b^2)(a+2)}{(a+2)(b-3)(b-a)}=\frac{-(a+b)(a^2+b^2)}{(b-3)}.$

Без биредә $a-b$ ны $b-a$ га бүлгәч -1 булганын исәпкә алдык. Ә инде бу очракта «–» тамгасын ваклаучыга күчерү яхшырак булыр.

$$\frac{-(a+b)(a^2+b^2)}{(b-3)}=\frac{(a+b)(a^2+b^2)}{-(b-3)}=\frac{(a+b)(a^2+b^2)}{3-b}.$$ ■

3 нче мисал. Гамәлләрне эшләргә:

$$\left(\frac{x+2}{3x^2-6x}\right)^3 : \left(\frac{x^2+4x+4}{x^2-4x+4}\right)^2.$$

Чишү.

$$\left(\frac{x+2}{3x^2-6x}\right)^3 : \left(\frac{x^2+4x+4}{x^2-4x+4}\right)^2 = \left(\frac{x+2}{3x(x-2)}\right)^3 : \left(\frac{(x+2)^2}{(x-2)^2}\right)^2 =$$

$$= \frac{(x+2)^3}{27x^3(x-2)^3} : \frac{(x+2)^4}{(x-2)^4} = \frac{(x+2)^3(x-2)^4}{27x^3(x-2)^3(x+2)^4} = \frac{x-2}{27x^3(x+2)}.$$ ▣

§6. РАЦИОНАЛЬ АҢЛАТМАЛАРНЫ РӘВЕШҮЗГӘРТҮ

Бу параграф без 7 нче сыйныфтан башлап математика теле, математик символлар, саннар, үзгәрешлеләр, дәрәҗәләр, алгебраик вакланмалар турында сөйләшкән барлык төшенчәләрне берләштерер. Тик башта үткәннәргә экскурсия ясап алырбыз.

Исегезгә төшерегез әле, саннарны һәм санлы аңлатмаларны ничегрәк итеп өйрәнгән идегез? Башта сез натураль саннарны (1, 2, 3, 4, 5, ...) һәм алар белән гамәлләрне өйрәндегез (билгеле инде, болардан да алда цифрлар белән танышкан идегез). Аннан соң бөтен саннар (0, 1, −1, 2, −2, 3, −3, ...) барлыкка килде — аларга барлык натураль саннар, нуль һәм барлык бөтен тискәре саннар керә. Аннары сез рациональ саннарны өйрәндегез — алар үз эченә барлык бөтен һәм вакланмалы, уңай һәм тискәре саннарны ала. Шулай итеп, һәр натураль санга, мәсәлән 2 санына, өч «ярлык» тагарга мөмкин: 2 саны — натураль, бөтен, рациональ. Һәм бу дөрес тә, өченче «ярлык» — рациональ сан — шактый киң төшенчә, икенче «ярлык» — бөтен сан — төгәлрәк, беренче «ярлык» — натураль сан — иң төгәле (безнең мисалда).

Теләсә кайсы бөтен санга мәсәлән, −2 санына, ике «ярлык» тагарга мөмкин: бөтен сан, рациональ сан. Ә инде $\frac{3}{5}$ вакланмасына бары бер генә — рациональ сан «ярлыгын» гына тагарга була.

Алгебраик аңлатмалар белән дә эш шулайрак тора: аларны өйрәнүнең беренче этабы — саннар, үзгәрешлеләр, дәрәҗәләр («цифрлар»); икенче этабы — бербуыннар («натураль саннар»); өйрәнүнең өченче этабы — күпбуыннар («бөтен саннар»); аларны өйрәнүнең дүртенче этабы — алгебраик вакланмалар («рациональ саннар»). Шул ук вакытта һәр киләсе этап үз эченә үзеннән алдагысын да ала: әйтик, саннар, үзгәрешлеләр, дәрәҗәләр — бербуыннарның аерым очраклары; бербуыннар — күпбуыннарның аерым очрагы; күпбуыннар — алгебраик вакланмаларның аерым очрагы. Алгебрада кайвакыт шундый терминнар да кулланалар: күпбуын — **бөтен аңлатма**, алгебраик вакланма — **вакланмалы аңлатма** (бу охшашлыкны көчәйтә генә).

бөтен аңлатма

вакланмалы аңлатма

рациональ аңлатма

Охшашлыкны (аналогияне) дәвам итәбез. Сез беләсез, теләсә нинди санлы аңлатма, аңа кергән барлык арифметик гамәлләрне үтәгәннән соң, төгәл санлы кыйммәт — рациональ сан ала (билгеле, ул натураль сан да, бөтен сан да, вакланма да булырга мөмкин). Нәкъ шулай ук, саннар һәм үзгәрешлеләрдән арифметик гамәлләр һәм натураль дәрәҗәгә күтәрү ярдәмендә төзелгән алгебраик аңлатма да (мондый аңлатмалар өчен алгебрада **рациональ аңлатма** термины кулланыла), рәвешүзгәртүләрдән соң алгебраик вакланма рәвешен ала (аерым алганда, вакланма түгел, ә күпбуын һәм хәтта бербуын да килеп чыгарга мөмкин).

Мисал. Бердәйлекне исбатларга:

$$\left(\frac{2a}{2a+b}-\frac{4a^2}{4a^2+4ab+b^2}\right):\left(\frac{2a}{4a^2-b^2}+\frac{1}{b-2a}\right)+\frac{8a^2}{2a+b}=2a.$$

Чишү. Бердәйлекне исбатлау — үзгәрешлеләрнең мөмкин табылган барлык кыйммәтләре өчен аның уң һәм сул яклары тигез булуны ачыклау дигән сүз. Алгебрада бердәйлекләрне төрле юллар белән исбатлыйлар.

игътибар итегез

1) сул якның рәвешүзгәртүләрен эшлиләр һәм нәтиҗәдә уң якны табалар;

2) уң якның рәвешүзгәртүләрен эшлиләр һәм нәтиҗәдә сул якны табалар;

3) аерым-аерым ике якны да рәвешүзгәртәләр һәм ике очракта да бер үк аңлатманы табалар;

4) сул һәм уң якларның аермасын төзиләр һәм үзгәртүләрдән соң нуль табалар.

Кайсы юлны сайлап алу — исбатлау өчен бирелгән бердәйлекнең конкрет төренә бәйләнгән. Безнең мисалда беренче юлны сайлап алу кулайрак булыр.

Рациональ аңлатмаларны рәвешүзгәртү өчен кабул ителгән эш тәртибе санлы аңлатмаларны рәвешүзгәртүдәге кебек үк. Димәк, башта җәяләр эчендәге гамәлләр эшләнә, аннан соң — икенче баскыч гамәлләре (тапкырлау, бүлү, дәрәҗәгә күтәрү), аннары — беренче баскыч гамәлләре (кушу, алу). Рәвешүзгәртүләрне, алдагы параграфларда өйрәнелгән кагыйдәләргә нигезләнеп, гамәлләргә бүлеп эшлибез.

1) $$\frac{2a}{2a+b}-\frac{4a^2}{4a^2+4ab+b^2}=\frac{2a^{|2a+b}}{2a+b}-\frac{4a^2}{(2a+b)^2}=$$

$$=\frac{2a(2a+b)-4a^2}{(2a+b)^2}=\frac{4a^2+2ab-4a^2}{(2a+b)^2}=\frac{2ab}{(2a+b)^2}.$$

2) $$\frac{2a}{4a^2-b^2}+\frac{1}{b-2a}=\frac{2a}{(2a-b)(2a+b)}-\frac{1^{|2a+b}}{2a-b}=$$

$$=\frac{2a-(2a+b)}{(2a-b)(2a+b)}=\frac{2a-2a-b}{(2a-b)(2a+b)}=\frac{-b}{(2a-b)(2a+b)}.$$

3) $$\frac{2ab}{(2a+b)^2}:\frac{-b}{(2a-b)(2a+b)}=-\frac{2ab(2a-b)(2a+b)}{(2a+b)^2\cdot b}=$$

$$=-\frac{2a(2a-b)}{2a+b}=\frac{-(4a^2-2ab)}{2a+b}=\frac{2ab-4a^2}{2a+b}.$$

4) $\dfrac{2ab-4a^2}{2a+b}+\dfrac{8a^2}{2a+b}=\dfrac{2ab-4a^2+8a^2}{2a+b}=$

$$=\frac{2ab+4a^2}{2a+b}=\frac{2a(b+2a)}{2a+b}=2a.$$

Күргәнегезчә, без тикшерелә торган бердәйлекнең сул ягын уң ягы рәвешенә китерә алдык. Димәк, бердәйлекне исбатладык. Тик исегезгә төшерәбез, бердәйлек үзгәрешлеләрнең мөмкин табылган кыйммәтләре өчен генә дөрес. Безнең мисалда бу a һәм b ның ваклаучыларны нульгә әйләндерә торганнарыннан тыш, теләсә нинди кыйммәтләре. Ягъни $2a-b=0$, $2a+b=0$, $b=0$ тигезлекләренең берсе генә булса да үтәлгәндәге кыйммәтләреннән тыш теләсә нинди $(a;\ b)$ саннар пары — мөмкин табылган кыйммәтләр. Башкача әйткәндә, $2a-b\neq0$, $2a+b\neq0$, $b\neq0$ нисбәтләре үтәлмәскә тиеш. ■

§7. РАЦИОНАЛЬ ТИГЕЗЛӘМӘЛӘР ЧИШҮ ТУРЫНДА БЕРЕНЧЕ КҮЗАЛЛАУЛАР

Әгәр $p(x)$ – рациональ аңлатма икән, $p(x)=0$ тигезләмәсен *рациональ тигезләмә* дип атыйлар. Без хәзергә әле теләсә кайсы рациональ тигезләмәне чишә алмыйбыз, моның өчен алгебраның башка бүлекләрен өйрәнергә кирәк. Әмма кайбер рациональ тигезләмәләрне без инде хәзер үк җиңә алабыз.

1 нче мисал. Тигезләмәне чишәргә:

$$\frac{2x-1}{5}-\frac{3x+2}{4}-1=0.$$

Чишү. Тигезләмәнең сул ягындагы гамәлләрне эшләрбез, моны исә бирелгән вакланмаларны уртак 20 ваклаучысына китерүдән башлыйбыз:

$$\frac{2x-1^{\backslash 4}}{5}-\frac{3x+2^{\backslash 5}}{4}-1^{\backslash 20}=\frac{4(2x-1)-5(3x+2)-20}{20}=$$

$$=\frac{8x-4-15x-10-20}{20}=\frac{-7x-34}{20}.$$

Хәзер тигезләмәне түбәндәге рәвештә күчереп язабыз:

$$\frac{-7x-34}{20}=0.$$

игътибар итегез

Вакланма ике шарт үтәлгәндә генә нульгә тигез була: санаучы нульгә тигез булырга, ә ваклаучы нульгә тигез булмаска тиеш. Димәк, табабыз:

$$-7x-34=0; \quad -7x=34; \quad x=-\frac{34}{7}.$$

Җавап: $x=-4\frac{6}{7}$

2 нче мисал. Тигезләмәне чишәргә:

$$\frac{2}{x+3}+1=\frac{x^2-10}{x^2-9}.$$

Чишү. $A=B$ һәм $A-B=0$ тигезләмәләре A һәм B арасындагы бер үк бәйлелекне күрсәтәләр. Моны исәпкә алып, бирелгән тигезләмәне $\frac{2}{x+3}+1-\frac{x^2-10}{x^2-9}=0$ рәвешендә күчереп язабыз.

Бу — рациональ тигезләмә. Аның сул ягында рәвешүзгәртүләр эшлибез:

$$\frac{2}{x+3}+1-\frac{x^2-10}{x^2-9}=\frac{2^{\backslash x-3}}{x+3}+1^{\backslash (x-3)(x+3)}-\frac{x^2-10}{(x-3)(x+3)}=$$

$$=\frac{2(x-3)+(x-3)(x+3)-(x^2-10)}{(x-3)(x+3)}=\frac{2x-6+x^2-9-x^2+10}{(x-3)(x+3)}=$$

$$=\frac{2x-5}{(x-3)(x+3)}.$$

Нәтиҗәдә без $\frac{2x-5}{(x-3)(x+3)}=0$ тигезләмәсен табабыз.

Вакланманың нульгә тигез булу шартларыннан файдаланабыз (алар белән без 1 нче мисалны чишкәндә танышкан идек). Вакланманың санаучысын нульгә тигезләп табабыз:

$$2x-5=0; \quad 2x=5; \quad x=2{,}5.$$

Тик исегезгә төшерәбез, вакланманың нульгә тигез булу шартлары икәү: санаучының нульгә тигезлеге (моны без инде тикшердек) һәм ваклаучының нульгә тигез булмавы. Икенче шартны тикшерергә кирәк.

Әгәр $x = 2{,}5$ булса, ваклаучы $(x - 3)(x + 3)$ нуль түгел. Барысы да үз урынында: $x = 2{,}5$ — тигезләмәнең тамыры.
Җавап: $x = 2{,}5$.

игътибар итегез

$\frac{a}{b}$ вакланмасының нульгә тигезлеге шартларының икесен дә бертигез күрергә тырышыгыз, ягъни башта $a = 0$ шартыннан файдаланырга, аннан соң, онытмыйча, $b \neq 0$ шартын тикшерергә кирәк.

3 нче мисал. Тигезләмәне чишәргә: $\frac{2x^2 + 5x - 3}{x^2 - 9} - \frac{x - 1}{x - 3} = 0.$

Чишү.

$$\frac{2x^2 + 5x - 3}{(x - 3)(x + 3)} - \frac{x - 1^{\,|(x+3)}}{x - 3} = 0;$$

$$\frac{2x^2 + 5x - 3 - (x - 1)(x + 3)}{(x - 3)(x + 3)} = 0.$$

Тигезләмәнең сул ягындагы алгебраик вакланманың санаучысын нульгә тигезләп, табабыз:

$$2x^2 + 5x - 3 - (x^2 - x + 3x - 3) = 0;$$

$$x^2 + 3x = 0;$$

$$x(x + 3) = 0;$$

$$x_1 = 0,\ x_2 = -3.$$

Табылган кыйммәтләрне тикшерәбез.

$x = -3$ булганда $(x - 3)(x + 3)$ ваклаучысы нульгә әйләнә, димәк, бу кыйммәт тигезләмәнең тамыры була алмый.

$x = 0$ булганда, ваклаучы нульгә әйләнми, бу кыйммәт тигезләмәнең кыйммәте була.

Җавап: 0.

4 нче мисал. Тигезләмәне чишәргә: $\frac{10}{x + 2} + \frac{6}{x - 2} = 2,$

Чишү. Тигезләмәне болай күчереп язабыз:

$$\frac{10}{x+2}+\frac{6}{x-2}-2=0.$$

Тигезләмәнең сул ягында рәвешүзгәртүләр эшлибез:

$$\frac{10^{|x-2}}{x+2}+\frac{6^{|x+2}}{x-2}-2^{|(x+2)(x-2)}=\frac{10(x-2)+6(x+2)-2(x^2-4)}{(x+2)(x-2)}=$$

$$=\frac{10x-20+6x+12-2x^2+8}{(x+2)(x-2)}=\frac{16x-2x^2}{(x+2)(x-2)}=\frac{2x(8-x)}{(x+2)(x-2)}.$$

Хәзер бирелгән тигезләмәне болай күчереп язабыз:

$$\frac{2x(8-x)}{(x+2)(x-2)}=0.$$

Вакланма нульгә тигез булсын өчен, беренче шарт $2x(8-x)=0$ тигезләмәсенә китерә, аны чишеп, табабыз:

$2x=0$ яки $8-x=0$, ягъни $x=0$ яки $x=8$.

Вакланманың нульгә тигезлегенең икенче шарты табылган $x=0$ һәм $x=8$ кыйммәтләрен чиратлап $(x+2)(x-2)$ тигезләмәсенә куеп карауны таләп итә. $x=0$ һәм $x=8$ кыйммәтләренең икесендә дә вакланма нульгә әйләнми, ике кыйммәт тә тигезләмәнең тамырлары була.

Җавап: 0; 8.

5 нче мисал. Көймә, елга агымы уңаена 10 км һәм агымга каршы 6 км йөзеп, барлык юлга 2 сәг вакыт сарыф итә. Әгәр елганың агым тизлеге 2 км/сәг булса, көймәнең үз тизлеген табыгыз.

Чишү.

Беренче этап. *Математик модель төзү.*

Бу этапны без алдарак (§ 1 тан 2 нче мисалны кара) үткән идек инде. Мәсьәләнең математик моделе:

$$\frac{10}{x+2}+\frac{6}{x-2}=2$$

тигезләмәсе, биредә x км/сәг — көймәнең үз тизлеге.

<u>Икенче этап.</u> *Төзелгән модель белән эшләү.*

§ 1 та без моны эшли алмадык. Хәзер инде без күбрәк беләбез, әлеге модельне, ягъни бу тигезләмәне без инде 4 нче мисалда чиштек. $x_1 = 0$, $x_2 = 8$ килеп чыккан иде.

<u>Өченче этап.</u> *Мәсьәләнең соравына җавап бирү.*

Көймәнең үз тизлеге нинди булуын, ягъни x ның кыйммәте ничәгә тигез икәнен табарга кирәк. Без моның йә 0, йә 8 икәнен таптык. Беренче кыйммәт безгә берничек тә туры килми, көймәнең үз тизлеге 0 гә тигез була алмый (шарт буенча ул тик тормый, ә йөзә). Икенче кыйммәт безне канәгатьләндерә.

Җавап: көймәнең үз тизлеге 8 км/сәг.

§ 8. ТИСКӘРЕ БӨТЕН КҮРСӘТКЕЧЛЕ ДӘРӘҖӘ

Сез теләсә нинди натураль күрсәткечле дәрәҗәне исәпли беләсез. Мәсәлән,

$0{,}2^1 = 0{,}2$; $3^2 = 3 \cdot 3 = 9$; $4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$; $1^4 = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$;
$(-2)^5 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -32$;
$0^6 = 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0$ һ.б.

7 нче сыйныфның алгебра курсында сез нуль күрсәткечле дәрәҗә төшенчәсе белән таныштыгыз: әгәр $a \neq 0$ булса, $a^0 = 1$. Мәсәлән, $5{,}7^0 = 1$; $(-3)^0 = 1$ һ.б.

Математика телен өйрәнүне алга таба дәвам итеп, без 2^{-3}, $3^{\frac{1}{2}}$ һәм башка символларның математикада нәрсә аңлатканын без әле аңларбыз. Без моны өлешчә нәкъ менә шушы параграфта, ә өлешчә 11 нче сыйныфның алгебра курсында өйрәнербез.

Шундый сорау куйыйк: әгәр 2^{-3} символын кертәбез икән, аңа нинди математик мәгънә салырга була? Дәрәҗәләрнең гадәти үзлекләрен саклап калырга иде, дип уйлаганнар математиклар, мәсәлән, нигезләре бер үк булган дәрәҗәләрне тапкырлаганда, күрсәткечләрне кушу үзлеге дә саклансын, аерым алганда, менә бу тигезлек үтәлсен иде:

$$2^{-3} \cdot 2^3 = 2^0 \text{ (төгәлрәк: } 2^{-3} \cdot 2^3 = 2^{-3+3} = 2^0\text{)}.$$

Ләкин $2^0 = 1$, ә ул вакытта $2^{-3} \cdot 2^3 = 1$ тигезлегеннән $2^{-3} = \frac{1}{2^3}$ икәнен табабыз. Димәк, 2^{-3} сен $\frac{1}{2^3}$ дип билгеләргә тулы нигез бар. Шуңа охшаш фикерләүләр түбәндәге билгеләмәне кертү мөмкинлеген бирә.

исегездә калдырыгыз

Билгеләмә. Әгәр n — натураль сан һәм $a \neq 0$ икән, a^{-n} сен $\frac{1}{a^n}$ дип аңлыйлар:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \ a \neq 0.$$

Мәсәлән, $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$, $\quad 7^{-1} = \frac{1}{7^1} = \frac{1}{7}$ һ.б.

Билгеле инде, югарыда язылган формуланы, кирәк булганда, уңнан сулга да укыйлар, мәсәлән:

$$\frac{1}{5} = 5^{-1}, \quad \frac{1}{81} = \frac{1}{3^4} = 3^{-4}.$$

Практикада еш кулланыла торган әһәмиятле бер бердәйлекне дә билгеләп китик:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

Аерым алганда,

$$\left(\frac{1}{a}\right)^{-n} = a^n, \ a \neq 0.$$

1 нче мисал. Исәпләргә: $2^{-2} + \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} - 16^{-1}$.

Чишү.

1) $2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$;

2) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3} = \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8}$;

3) $16^{-1} = \frac{1}{16}$;

4) $\frac{1}{4} + \frac{27}{8} - \frac{1}{16} = \frac{57}{16}$.

Җавап: $3\frac{9}{16}$.

2 нче мисал. Исбатларга:

а) $a^{-3} \cdot a^{-5} = a^{-8}$; б) $a^4 : a^{-3} = a^7$; в) $(a^{-2})^{-3} = a^6$.

Чишү. а) $a^{-3} \cdot a^{-5} = \frac{1}{a^3} \cdot \frac{1}{a^5} = \frac{1}{a^3 \cdot a^5} = \frac{1}{a^8} = a^{-8}$.

б) $a^4 : a^{-3} = a^4 : \frac{1}{a^3} = a^4 \cdot a^3 = a^7$.

в) $(a^{-2})^{-3} = \left(\frac{1}{a^2}\right)^{-3} = (a^2)^3 = a^6$. ▣

2 нче мисалда исбатланган бердәйлекләрне игътибар белән карыйк. Беренчесе

$$a^{-3} \cdot a^{-5} = a^{-3+(-5)}$$

икәнен аңлата (*нигезләре бер үк булган дәрәҗәләрне тапкырлаганда, күрсәткечләр кушылалар*).

Икенче бердәйлек

$$a^4 : a^{-3} = a^{4-(-3)}$$

икәнен аңлата (*нигезләре бер үк булган дәрәҗәләрне бүлгәндә, бүленүченең күрсәткеченнән бүлүченең күрсәткечен алырга кирәк*).

Өченче бердәйлек

$$(a^{-2})^{-3} = a^{(-2)\cdot(-3)}$$

икәнен аңлата (*дәрәҗәне дәрәҗәгә күтәргәндә, күрсәткечләр кушылалар*).

игътибар итегез

Инде күргәнегезчә, натураль күрсәткечле дәрәҗәләр белән эшләгәндә дәрәҗәләрнең сезгә бик таныш булган үзлекләре тискәре бөтен күрсәткечләр өчен дә саклана икән.

Гомумән алганда, түбәндәге үзлекләр дөрес була (без биредә $a \neq 0$, $b \neq 0$, s һәм t — ирекле бөтен саннар дип уйлыйбыз):

1. $a^s \cdot a^t = a^{s+t}$.
2. $a^s : a^t = a^{s-t}$.
3. $(a^s)^t = a^{st}$.
4. $(ab)^s = a^s \cdot b^s$.
5. $\left(\frac{a}{b}\right)^s = \frac{a^s}{b^s}$.

Күргәнегезчә, без хәзер 2 нче үзлектә дәрәҗәнең натураль күрсәткечләре белән генә эшләгәндә керткән $s > t$ чикләвен ясамасак та була. Мәсәлән, $a^7 : a^2 = a^{7-2}$ тигезлеге дөрес булган кебек, $a^2 : a^7 = a^{2-7}$ тигезлеге дә дөрес.

Әлеге үзлекләр өлешчә нигезләнде дип уйлыйбыз һәм хәзергә шулар җитеп торыр.

ТӨП НӘТИҖӘЛӘР

Бу бүлектә без түбәндәге төшенчәләр белән таныштык:
алгебраик вакланма; алгебраик вакланманың санаучысы һәм ваклаучысы;
алгебраик вакланманың төп үзлеге;
берничә алгебраик вакланманы уртак ваклаучыга китерү;
рациональ аңлатма, бөтен аңлатма, вакланмалы аңлатма;
рациональ тигезләмә;
тискәре бөтен күрсәткечле дәрәҗә.

Без түбәндәге кагыйдәләрне чыгардык:
берничә алгебраик вакланманы уртак ваклаучыга китерү кагыйдәсе;
алгебраик вакланмаларны кушу, алу, тапкырлау һәм бүлү кагыйдәләре;

алгебраик вакланманы натураль дәрәҗәгә күтәрү кагыйдәсе;

$\frac{P\ x}{Q\ x}=0$ рәвешендәге тигезләмәләрне чишү кагыйдәсе, биредә $P(x)$ һәм $Q(x)$ — күпбуыннар;

Без a һәм b ның нуль булмаган барлык кыйммәтләре һәм t һәм s күрсәткечләренең бөтен сан күрсәткечләре өчен дөрес булган яңа бердәйлекләр таптык.

$a^s \cdot a^t = a^{s+t}$;

$a^s : a^t = a^{s-t}$;

$(a^s)^t = a^{st}$;

$(ab)^s = a^s \cdot b^s$;

$\left(\frac{a}{b}\right)^s = \frac{a^s}{b^s}$.

2 БҮЛЕК $y = \sqrt{x}$ ФУНКЦИЯСЕ. КВАДРАТ ТАМЫРНЫҢ ҮЗЛЕКЛӘРЕ

§ 9. *Рациональ саннар*
§ 10. *Тискәре булмаган саннан квадрат тамыр төшенчәсе*
§ 11. *Иррациональ саннар*
§ 12. *Реаль саннар күплеге*
§ 13. *$y = \sqrt{x}$ функциясе, аның үзлекләре һәм графигы*
§ 14. *Квадрат тамырларның үзлекләре*
§ 15. *Квадрат тамыр алу гамәле кергән аңлатмаларны рәвешүзгәртү*
§ 16. *Реаль санның модуле*

§ 9. РАЦИОНАЛЬ САННАР

1. Математика теленең кайбер символлары

Сезгә натураль саннар яхшы билгеле:

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots\ .$$

Барлык **натураль саннар күплеген,** гадәттә, N хәрефе белән билгелиләр.

Әгәр натураль саннарга 0 санын һәм барлык тискәре бөтен саннарны −1, −2, −3, −4, ... да кертсәк, **бөтен саннар күплеге** килеп чыгар. Бу күплек гадәттә Z хәрефе белән билгеләнә.

Әгәр бөтен саннар күплегенә барлык гади вакланмаларны $\frac{2}{3}, \frac{15}{8}, -\frac{33}{58}$ һ.б. кертсәк, **рациональ саннар күплеген** табабыз. Бу күплекне Q хәрефе белән билгелиләр.

Теләсә нинди бөтен m санын $\frac{m}{1}$ вакланмасы рәвешендә күрсәтергә мөмкин, шуңа күрә *рациональ саннар күплеге* $\boldsymbol{Q}$ — $\frac{m}{n}, -\frac{m}{n}$ *рәвешендәге саннар күплегеннән һәм 0 санынннан тора* (*биредә m, n — натураль саннар*), дип әйтү дөрес була.

элементның керү тамгасы

күплекнең керү тамгасы

күплек

аскүплек

Әле кертелгән $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{Z}$, $\boldsymbol{Q}$ билгеләнешләрен кулланып, түбәндәгеләр турында килешербез:

1. «n — натураль сан» дигән сүзтезмә урынына $n \in \boldsymbol{N}$ дип язарга мөмкин. («n элементы $\boldsymbol{N}$ күплегенә керә» дип уйлыйлар). Математик $\in$ символын *керү тамгасы* дип атыйлар.

2. «m — бөтен сан» дигән сүзтезмә урынына $m \in \boldsymbol{Z}$ дип язалар.

3. «r — рациональ сан» дигән сүзтезмә урынына $r \in \boldsymbol{Q}$ дип язарга мөмкин.

$\boldsymbol{N}$ ның $\boldsymbol{Z}$, ә $\boldsymbol{Z}$ ның $\boldsymbol{Q}$ күплегенең бер өлеше икәне аңлашыла. Бу хәлне сурәтләү өчен математикада махсус язылыш бар:

$$\boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{Z}, \quad \boldsymbol{Z} \subset \boldsymbol{Q}.$$

Математик $\subset$ символын бер күплекнең икенчесенә тулысы белән *керү тамгасы* дип йөртәләр.

Гомумән, математикада $x \in X$ язылышы x — X күплеге элементларының берсе дигәнне аңлата. $A \subset B$ язылышы A күплеге B күплегенең бер өлеше икәнен белдерә. Математиклар күбесенчә A — B *күплегенең аскүплеге* дип сөйләшә.

Игътибар итегез: математикада, гадәттә, күплекләр — баш хәрефләр белән, ә күплекләрнең элементлары юл хәрефләре белән билгеләнә.

Тагын бер әйбергә игътибар итегез: элементның күплеккә керү һәм күплекнең икенче бер күплек эченә керү тамгалары төрлечә языла, тиңдәшле рәвештә $\in$ һәм $\subset$.

Ә менә x элементы X күплегенә керми, яисә A күплеге B күплегенең бер өлеше (аскүплеге) булып тормый дигәнне ничек язарга? Шул ук символлар кулланыла, тик алар кыек сызык белән аркылы сызылалар: $x \notin X, A \not\subset B$.

Дөрес математик расламалар (аларны *дөрес әйтелешләр* дип тә атыйлар) язылышларын кыскарту өчен, әлеге математик символларны куллануга берничә мисал китерәбез:

1 нче мисал.

а) $5 \in N$, $5 \in Z$, $5 \in Q$;

б) $-7 \notin N$, $-7 \in Z$, $-7 \in Q$;

в) $3{,}5 \notin N$, $3{,}5 \notin Z$, $3{,}5 \in Q$.

2 нче мисал.

$2 \in [1; 3]$; $1 \in [1; 3]$; $1 \notin (1; 3)$.

3 нче мисал.

а) $N \subset Z$, $Z \not\subset N$, $Z \subset Q$, $Q \not\subset Z$;

б) $(1; 3) \subset [1; 3]$, $[1; 3] \not\subset (1; 3)$, $[1; 3] \subset (0; +\infty)$, $[2; 5] \subset (-3; 8)$.

2. Чиксез периодик унарлы вакланма буларак рациональ саннар

Барлык рациональ саннар өчен бер үк төрле язылышны кулланырга мөмкин, хәзер без шул язылышны карарбыз.

Мәсәлән, бөтен сан 5 не, гади вакланма $\frac{7}{22}$ не, унарлы вакланма 8,377 не карыйк. Бөтен 5 санын чиксез унарлы вакланма 5,0000... рәвешендә язарга була. Унарлы 8,377 вакланмасын да чиксез унарлы вакланма 8,377000... рәвешендә язарга мөмкин. $\frac{7}{22}$ саны өчен почмаклап бүлү юлын кулланабыз:

```
−7,000000... | 22
  66         |----------
 −40         | 0,31818...
  22
 −180
  176
  −40
   22
   180
   ...
```

вакланма периоды

чиксез периодик унарлы вакланма

Күргәнегезчә, өтердән соңгы икенче цифрдан башлап, бер үк: 18, 18, 18, ... цифрлар төркемнәре кабатлана башлый. Шулай итеп, $\frac{7}{22} = 0{,}3181818...$. Кыскарак итеп моны 0,3(18) дип язалар. Өтердән соң кабатлана торган цифрлар төркемен — **период** дип, ә унарлы вакланманың үзен **чиксез периодик унарлы вакланма** дип атыйлар.

5 санын да чиксез периодик унарлы вакланма рәвешендә күрсәтеп була:

$$5 = 5{,}00000... = 5{,}(0).$$

8,377 саны белән дә шул ук хәл:

$$8{,}377 = 8{,}377000... = 8{,}377(0).$$

Барысы да төгәлрәк булсын өчен, 8,377 не — чикле унарлы вакланма, ә 8,377000... не чиксез унарлы вакланма дип йөртәләр.

Шулай итеп, 5 санын да, $\frac{7}{22}$ санын да, 8,377 санын да чиксез периодик унарлы вакланма рәвешендә яза алдык.

Искәрмә. Мондый чыгарылма теория өчен уңай булса да, практикада бик үк уңай түгел. Чыннан да, әгәр чикле унарлы вакланма 8,377 бирелгән икән, ни өчен аны 8,377(0) дип язу кирәк? Шуңа күрә гадәттә болай диләр:

теләсә нинди рациональ санны чикле унарлы вакланма рәвешендә яки чиксез периодик унарлы вакланма рәвешендә язарга мөмкин.

Алда без гади вакланманы ничек итеп чиксез периодик унарлы вакланма рәвешендә күрсәтеп булганын карап үттек. Киресе дә дөрес: *теләсә нинди чиксез периодик унарлы вакланманы гади вакланма рәвешендә күрсәтергә мөмкин. Бу исә теләсә кайсы чиксез периодик унарлы вакланманың рациональ сан икәнен аңлата.*

Чиксез периодик унарлы вакланманы гади вакланма рәвешенә китерүне мисалда карап үтик.

4 нче мисал. Чиксез периодик унарлы вакланма рәвешендә язарга:

а) 1,(23); б) 1,5(23); в) 0,1(9).

Чишү. а) $x = 1,(23)$, ягъни $x = 1,232323...$ булсын. Өтер уң якка бер периодка күчәрлек итеп, x ныниндидер санга тапкырлыйк. Периодта ике цифр булганлыктан, өтер уңга таба ике цифрга күчсен өчен, x санын 100 гә тапкырларга кирәк.

$$100x = 123,232323...\ .$$

Димәк,

$$\begin{array}{r} 100x = 123,232323... \\ -\quad x = \quad 1,232323... \\ \hline \end{array}$$

$$100x - x = 123,232323... - 1,232323...,$$

ягъни

$$99x = 122.$$

моннан $x = \dfrac{122}{99}$.

Димәк, $1,(23) = \dfrac{122}{99} = 1\dfrac{23}{99}$.

б) $x = 1,5(23) = 1,5232323...$ дип алыйк. Башта x санын, период өтердән соң ук башланырлык итеп, 10 га тапкырлыйбыз: $10x = 15,232323...$. Хәзер $10x$ санын 100 гә тапкырлыйбыз — период нәкъ бер периодка уңга күчә: $1000x = 1523,232323...$. Моннан

$$\begin{array}{r} 1000x = 1523{,}232323... \\ -\quad 10x = \quad 15{,}232323... \\ \hline 990x = 1508; \end{array}$$

$$x = \frac{1508}{990} = \frac{754}{495} = 1\frac{259}{495}.$$

Димәк, $1{,}5(23) = \frac{754}{495} = 1\frac{259}{495}$.

в) $x = 0{,}1(9)$ дип алабыз. Ул вакытта

$$\begin{array}{r} 100x = 19{,}999... \\ -\quad 10x = 1{,}999... \\ \hline 90x = 18. \end{array}$$

Соңгы тигезләмәдә $x = \frac{1}{5}$ икәнен табабыз. Игътибар итегез: $\frac{1}{5} = 0{,}2 = 0{,}2000... = 0{,}2(0)$. Шулай итеп, $\frac{1}{5}$ саны чиксез периодик унарлы вакланма рәвешендәге ике язылышка ия икән:

$$\frac{1}{5} = 0{,}2(0); \quad \frac{1}{5} = 0{,}1(9).$$

Искәрмә. Бу мисалда 0,1(9) = 0,2(0) икәнен күрдек. Шундый ук юл белән 2,45(9) = 2,46(0), 1,(9) = 2,(0) һ.б. икәнен билгеләргә була. Шуңа күрә, гадәттә, периоды 9 булган унарлы вакланмаларны тикшереп тормыйлар, ә 0 периодлы тиңдәш вакланмалар белән алыштыралар. Мәсәлән, 1,23(9) урынына 1,24(0), ягъни 1,24 дип, ә 0,345(9) урынына 0,346(0), ягъни 0,346 дип язалар.

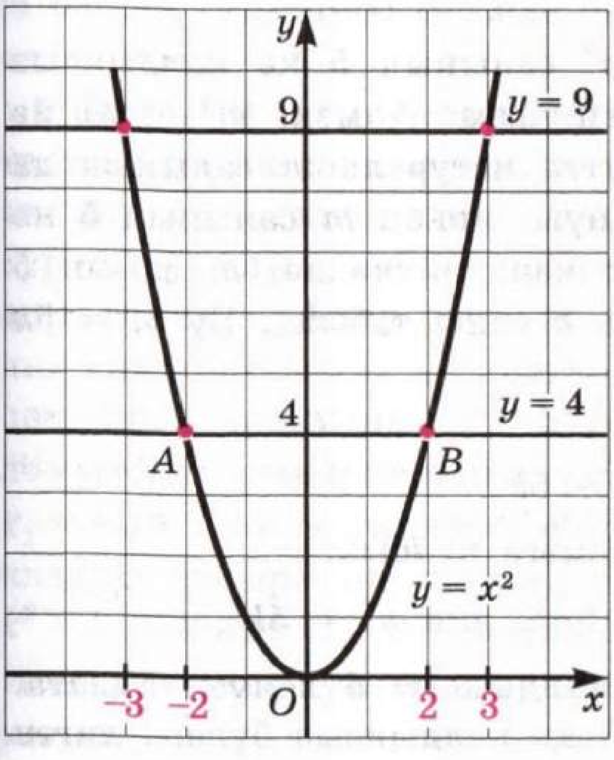
Хәзер без бу параграфның төп нәтиҗәсен формалаштырабыз: *рациональ саннар күплеге* Q *ны* $\frac{m}{n}$ *рәвешендәге саннар, яки чиксез периодик унарлы вакланмалар күплеге рәвешендә күрсәтергә мөмкин, биредә* m *— бөтен сан,* n *— натураль сан.*

§ 10. ТИСКӘРЕ БУЛМАГАН САННАН КВАДРАТ ТАМЫР ТӨШЕНЧӘСЕ

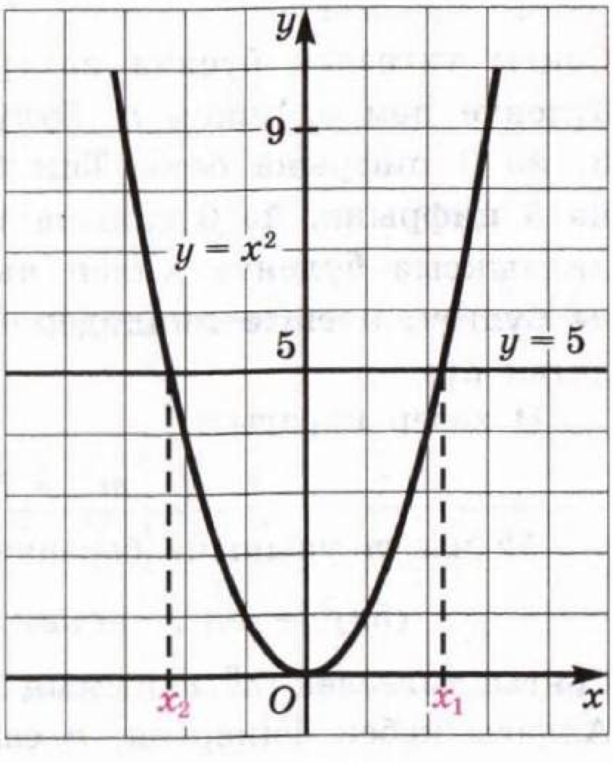
$x^2 = 4$ тигезләмәсен карыйк. Аны график юл белән чишәрбез. Моның өчен бер үк координаталар системасында $y = x^2$ параболасын һәм $y = 4$ турысын төзибез (рәс. 1). Алар $A(-2; 4)$ һәм $B(2; 4)$ нокталарында кисешәләр. A һәм B нокталарының абсциссалары $x^2 = 4$ тигезләмәсенең тамырлары булып тора. Шулай итеп, $x_1 = -2$, $x_2 = 2$.

Шулай ук фикер йөртеп, $x^2 = 9$ тигезләмәсенең дә тамырларын табабыз (рәс. 1): $x_1 = -3$, $x_2 = 3$.

Ә хәзер $x^2 = 5$ тигезләмәсен чишеп карыйк, аның геометрик сурәте 2 нче рәсемдә бирелгән. Шунысы ачык: бу тигезләмәнең дә x_1 һәм x_2 булган ике тамыры бар, һәм бу саннар, алдагы ике очрактагы кебек, абсолют зурлыклары буенча капма-каршы ($x_1 = -x_2$). Әмма алдагы ике очракта тамырларны табу җиңел булса да (аларны графикларсыз да табып була иде), $x^2 = 5$ тигезләмәсендә бу эш четерекле: сызым буенча без тамырларның төгәл кыйммәтләрен күрсәтә алмыйбыз, бер тамырның -2 ноктасыннан аз гына сулдарак, ә икенчесенең 2 ноктасыннан бераз уңдарак икәнен генә әйтеп була.



Рәс. 1



Рәс. 2

Шулай да, 2 ноктасыннан аз гына уңгарак яткан һәм квадраты 5 кә тигез булган нинди сан (нокта) икән бу? 3 түгел икәне ачык күренә, чөнки $3^2 = 9$, ягъни кирәгеннән артыграк ($9 > 5$). Димәк, безгә кирәкле сан 2 һәм 3 саннары арасында ята. Ләкин 2 һәм 3 арасында чиксез күп рациональ саннар бар. Мәсәлән, $\frac{17}{8}, \frac{25}{11}, \frac{2973}{1000}$ һ.б. Бәлки, алар арасында $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 5$ булырлык $\frac{m}{n}$ вакланмасы бардыр? Ул вакытта $x^2 = 5$ тигезләмәсе кыенлык тудырмаячак, без $x_1 = \frac{m}{n}$, $x_2 = -\frac{m}{n}$ дип яза алабыз.

Тик монда безне күңелсез сюрприз көтә. Чөнки $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 5$ *тигезлеге үтәлә торган $\frac{m}{n}$ вакланмасы булмый икән.*

Әлеге расламаны исбатлау шактый ук катлаулы. Шулай да без аны төзеклеге һәм ачыклыгы аркасында вак хәрефләр (петит) белән күрсәтергә булдык.

Әйтик, $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 5$ тигезлеге үтәлә һәм *кыскармый торган* $\frac{m}{n}$ вакланмасы бар дип уйлыйк. Ул вакытта $\frac{m^2}{n^2} = 5$, ягъни $m^2 = 5n^2$. Соңгы тигезлек буенча натураль m^2 санының 5 кә калдыксыз бүленүе һәм өлешнең n^2 булуы килеп чыга. Димәк, m^2 саны йә 5, йә 0 цифрына бетә. Тик бу вакытта натураль m санының да йә 5 цифрына, йә 0 санына тәмамлануы, ягъни m санының 5 кә калдыксыз бүленүе килеп чыга. Башкача әйткәндә, m санын 5 кә бүлгәч, өлештә ниндидер натураль k саны табыла. Бу $m = 5k$ дигән сүз.

Ә хәзер карагыз:

$$m^2 = 5n^2; \quad m = 5k.$$

$5k$ ны m урынына беренче тигезләмәгә куябыз:

$$(5k)^2 = 5n^2, \quad \text{ягъни } 25k^2 = 5n^2, \text{ яки } n^2 = 5k^2.$$

Соңгы тигезлек n^2 санының 5 кә калдыксыз бүленүен аңлата. Алдагы кебек фикерләп, n саны да 5 кә калдыксыз бүленә дигән нәтиҗәгә киләбез.

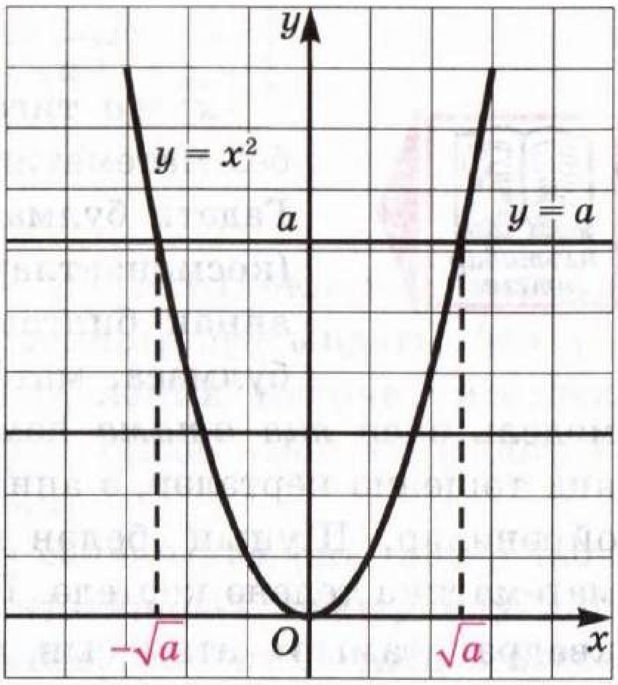
Шулай итеп, m да, n да 5 кә бүленәләр, димәк, $\frac{m}{n}$ вакланмасын 5 кә кыскартырга мөмкин. Ә бит без $\frac{m}{n}$ вакланмасын кыскармый торган дип алган идек. Эш нидә соң? Ничек инде без, дөрес фикер йөртеп, ялгышка юлыктык яисә, математиклар еш кулланганча, *капма-каршылыкка килеп чыктык*? Төп сәбәп: безнең $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 5$ тигезлеге үтәлә торган $\frac{m}{n}$ вакланмасы бар, һәм ул кыскармый дигән беренче фикеребез үзе үк ялгыш булган. Нәтиҗәдә: мондый вакланма юк.

капма-каршысыннан чыгып исбатлау

Без әле генә кулланган исбатлау алымын математикада **капма-каршысыннан чыгып исбатлау алымы** дип атыйлар. Аның мәгънәсе түбәндәгечә. Безгә ниндидер раслауны исбатларга кирәк, ә без ул үтәлми дип фаразлыйбыз (математикада «киресен фаразлыйбыз» диләр, ягъни «таләп ителгәннең капма-каршысы үтәлә»). Әгәр дөрес фикер йөртүләр барышында шартта күрсәтелгәннең киресенә килеп чыксак, безнең фаразыбыз дөрес булмаган, исбатларга тиешле раслау дөрес икән дигән нәтиҗә ясыйбыз.

Шулай итеп, бары тик рациональ саннар ярдәмендә генә (ә башка саннарны без әле белмибез), $x^2 = 5$ тигезләмәсен чишә алмыйбыз.

Шундый хәл белән беренче тапкыр очрашканнан соң, математиклар аны математика телендә сурәтләү юлын табу кирәклеген аңлаганнар. Алар моның өчен яңа символ (тамга) $\sqrt{\ }$ кертләннәр һәм аның ярдәмендә $x^2 = 5$ тигезләмәсенең тамырларын: $x_1 = \sqrt{5}$, $x_2 = -\sqrt{5}$ дип язганнар («биштән квадрат тамыр» дип укыла). Хәзер $x^2 = a$ (биредә $a > 0$) рәвешендәге теләсә нинди тигезләмәнең тамырларын $x_1 = \sqrt{a}$, $x_2 = -\sqrt{a}$ дип язарга мөмкин (рәс. 3).



Рәс. 3

Тагын бер тапкыр ассызыклыйбыз, $\sqrt{5}$ — бөтен сан да, вакланмалы сан да түгел, ягъни $\sqrt{5}$ — рациональ булмаган сан, ул — *яңа табигатьле сан,* аның турында соңрак, § 11 та сөйләшербез.

Хәзер бары тик яңа $\sqrt{5}$ санының 2 һәм 3 арасында булуын гына билгеләп үтәбез, чөнки $2^2 = 4$, бу биштән кечерәк; $3^2 = 9$, ә монысы 5 тән зуррак. Төгәлрәк язсак:

$$2{,}2 < \sqrt{5} < 2{,}3.$$

Чынлап та, $2{,}2^2 = 4{,}84 < 5$, ә $2{,}3^2 = 5{,}29 > 5$. Тагын да төгәлрәк язабыз:

$$2{,}23 < \sqrt{5} < 2{,}24;$$

чынлап та, $2{,}23^2 = 4{,}9729 < 5$, ә $2{,}24^2 = 5{,}0176 > 5$.

Практикада, гадәттә, $\sqrt{5}$ саны 2,23 кә яки 2,24 кә тигез дип атала, тик бу гадәти тигезлек түгел, ә *якынча тигезлек* була һәм аны белдерү өчен ≈ билгесе кулланыла.

Шулай итеп,

$$\sqrt{5} \approx 2{,}23 \text{ яки } \sqrt{5} \approx 2{,}24.$$

$x^2 = a$ тигезләмәсенең чишелешен тикшереп, без математикага хас булган хәлләргә юлыктык. Гадәти булмаган, башкача әйтсәк, штаттан тыш (космонавтлар шулай сөйли) хәлгә тап булып, аннан билгеле чаралар ярдәмендә генә чыгып булмаса, математиклар яңа очраган математик модель өчен *яңа атама* һәм *яңа тамга* уйлап табалар; ягъни яңа төшенчә кертәләр, ә аннан соң яңа төшенчәнең *үзлекләрен* өйрәнәләр. Шуның белән яңа төшенчә һәм аның тамгасы математика теленә кертелә. Без дә шулай эшләдек: «*а* саныннан квадрат тамыр» атамасын керттек, аны аңлату өчен $\sqrt{a}$ тамгасын керттек, ә яңа төшенчәнең үзлекләрен бераз соңрак

(§ 14) өйрәнербез. Хәзергә без бары шуны беләбез: әгәр $a > 0$ булса, $\sqrt{a}$ — $x^2 = a$ тигезлеген канәгатьләндерә торган уңай сан. Башкача әйтсәк, $\sqrt{a}$ — квадратка күтәргәч a саны килеп чыга торган уңай сан ул.

$x^2 = 0$ тигезләмәсенең тамыры $x = 0$ булганлыктан, $\sqrt{0} = 0$ дип килешкәннәр.

Әгәр $a < 0$ булса, $x^2 = a$ тигезләмәсенең тамырлары булмый, бу очракта a санынннан квадрат тамыр турында сөйләүнең мәгънәсе юк. Шулай итеп, $\sqrt{a}$ ***аңлатмасының*** $a \geqslant 0$ ***булганда гына мәгънәсе бар.***

Хәзер без каттый билгеләмә бирергә әзер.

Билгеләмә. **Квадраты a га тигез булган тискәре булмаган сан** тискәре булмаган a санынннан квадрат тамыр дип атала. Бу санны $\sqrt{a}$ дип билгелиләр, a санын **тамырасты саны** дип атыйлар.

Шулай итеп, әгәр a — тискәре булмаган сан икән:

$$1)\ \sqrt{a} \geqslant 0; \qquad 2)\ \left(\sqrt{a}\right)^2 = a.$$

$\sqrt{a} = b$ һәм $b^2 = a$ тигезлекләре тискәре булмаган a һәм b саннары арасындагы бер үк бәйлелекне аңлаталар, ләкин икенче тигезлек беренчесеннән гадирәк телдә язылган (гадирәк тамгалар кулланылган).

квадрат тамыр

тамырасты саны

квадрат тамыр алу

Тискәре булмаган саннан квадрат тамыр табу гамәлен (операциясен) **квадрат тамыр алу** дип атыйлар. Бу гамәл квадратка күтәрүнең киресе булып тора. Чагыштырыгыз:

Квадратка күтәрү	Квадрат тамыр алу
$5^2 = 25$	$\sqrt{25} = 5$
$10^2 = 100$	$\sqrt{100} = 10$
$0{,}3^2 = 0{,}09$	$\sqrt{0{,}09} = 0{,}3$

игътибар итегез

Тагын бер игътибар итегез: таблицада бары уңай саннар гына, чөнки бу квадрат тамырның билгеләмәсендә әйтелә. Хәер, мәсәлән, $(-5)^2 = 25$ — дөрес тигезлек булса да, аннан квадрат тамыр кулланылган язылышка күчү (ягъни $\sqrt{25} = -5$ дип язу) дөрес түгел. Билгеләмә буенча, $\sqrt{25}$ — уңай сан, димәк, $\sqrt{25} = 5$ (-5 түгел).

Кайвакыт «квадрат тамыр» дип түгел, ә «арифметик квадрат тамыр» дип әйтәләр. Кыскалык өчен без «арифметик» сүзен төшереп калдырабыз.

1 нче мисал. Исәпләргә:

а) $\sqrt{49}$; в) $\sqrt{0}$; д) $\sqrt{-4}$; ж) $\sqrt{5625}$;

б) $\sqrt{0{,}25}$; г) $\sqrt{17}$; е) $\sqrt{961}$; з) $\sqrt{\dfrac{49}{169}}$.

Чишү.

а) $\sqrt{49} = 7$, чөнки $7 > 0$ һәм $7^2 = 49$.

б) $\sqrt{0{,}25} = 0{,}5$, чөнки $0{,}5 > 0$ һәм $0{,}5^2 = 0{,}25$.

в) $\sqrt{0} = 0$.

г) Алдагы мисаллардан аермалы буларак, без $\sqrt{17}$ санының төгәл кыйммәтен күрсәтә алмыйбыз. Бары тик аның 4 тән зур, 5 тән кечкенә икәне ачык, чөнки $4^2 = 16$ (бу 17 дән кечерәк), ә $5^2 = 25$ (бу 17 дән зуррак).

Микрокалькулятор ярдәмендә $\sqrt{17}$ санының якынча кыйммәтен табарга мөмкин, бу сан 4,123 кә тигез. Димәк, $\sqrt{17} \approx 4{,}123$.

игътибар итегез

$\sqrt{17}$ саны да, алда карап үтелгән $\sqrt{5}$ саны кебек, рациональ сан түгел.

д) $\sqrt{-4}$ не исәпләп булмый, чөнки тискәре саннан квадрат тамыр алынмый; $\sqrt{-4}$ язылышының мәгънәсе юк. Бу бирем *төгәл куелмаган.*

е) $\sqrt{961} = 31$, чөнки $31 > 0$ һәм $31^2 = 961$. Мондый очракларда натураль саннарның квадратлары таблицасын яки микрокалькулятор кулланырга мөмкин.

ж) $\sqrt{5625} = 75$, чөнки $75 > 0$ һәм $75^2 = 5625$.

з) $\sqrt{\dfrac{49}{169}} = \dfrac{7}{13}$, чөнки $\dfrac{7}{13} > 0$ һәм $\left(\dfrac{7}{13}\right)^2 = \dfrac{49}{169}$. ▣

Иң гади очракларда квадрат тамырның кыйммәте тиз исәпләнә: $\sqrt{1} = 1$, $\sqrt{4} = 2$, $\sqrt{16} = 4$, $\sqrt{0{,}01} = 0{,}1$ һ.б. Катлаулырак очракларда саннарның квадратлары таблицасыннан файдаланырга яки микрокалькулятор ярдәмендә исәпләргә була. Ә кул астында таблица да, калькулятор да булмаса нишләргә? Бу сорауга түбәндәге мисалны чишкәннән соң җавап бирәбез.

2 нче мисал. $\sqrt{2809}$ — натураль сан булса, аны табарга.

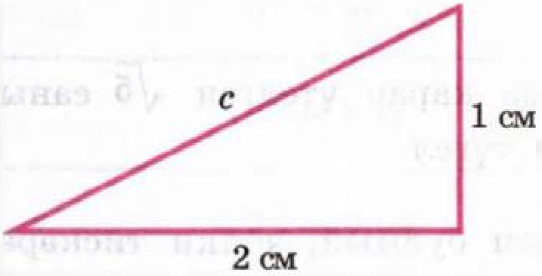
Чишү.

<u>Беренче этап</u>. Җавапта 50 саны һәм аның күпмедер «койрыгы» булуы ачык күренә. Чыннан да, $50^2 = 2500$, ә $60^2 = 3600$, 2809 саны исә 2500 һәм 3600 арасында урнашкан.

<u>Икенче этап</u>. «Койрыкны», ягъни эзләнелә торган санның икенче цифрын табабыз. Без хәзергә тамырның барлыгын һәм аның 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58 яки 59 саннарының берсе икәнен беләбез. Бары ике санны: 53 һәм 57 не генә тикшерергә кирәк, чөнки алар гына квадратка күтәргәндә 9 цифры белән беткән 2809 саны кебек дүртурынлы санны бирәләр.

$53^2 = 2809$ — беренчесеннән үк «тидердек», бу безгә кирәкле сан. Димәк, $\sqrt{2809} = 53$.

Җавап: $\sqrt{2809} = 53$.



Рәс. 4

3 нче мисал. Турыпочмаклы өчпочмакның катетлары 1 см га һәм 2 см га тигез. Өчпочмакның гипотенузасы ничә см га тигез (рәс. 4)?

Чишү. Сез бик тиздән геометрия дәресләрендә атаклы Пифагор теоремасы турында өйрәнәчәксез, анда турыпочмаклы өчпочмакта катетларның квадратлары суммасы гипотенузаның квадратына тигезлеге әйтелә, ягъни $a^2 + b^2 = c^2$, (биредә a һәм b — катетлар, c — гипотенуза). Димәк,

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}, \text{ ягъни } c = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}.$$

Җавап: $\sqrt{5}$ см.

Бу мисал квадрат тамыр төшенчәсен кертү математиканың теләге түгел, ә чынбарлык зарурлыгы икәнен күрсәтә: тормыштагы кайбер хәлләрнең математик модельләрендә квадрат тамыр алу гамәле очрый. Мондый хәлләрнең иң мөһиме квадрат тигезләмәләр чишү белән бәйләнгән. Бу 7 нче сыйныфта $ax^2 + bx + c = 0$ рәвешле квадрат тигезләмәләр белән очрашканда, аларны йә тапкырлаучыларга таркаттык (һәрвакыт килеп чыкмый да иде), йә график алымнар кулландык (матур булсалар да, һәрвакыт ук ышанычлы түгелләр иде). Ә математикада $ax^2 + bx + c = 0$ квадрат тигезләмәсенең x_1 һәм x_2 тамырларын табу өчен, квадрат тамыр тамгасы кергән

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

формулалары кулланыла (без аларны соңрак, § 25 та чыгарабыз, ә хәзер куллаңырбыз гына). Бу формулалар гамәлдә болай кулланыла. Әйтик, $2x^2 + 5x - 7 = 0$ тигезләмәсен чишәргә кирәк булсын. Биредә $a = 2$, $b = 5$, $c = -7$.

Димәк, $b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-7) = 81$. Моннан $\sqrt{81} = 9$. Димәк, $x_1 = \dfrac{-5+9}{2 \cdot 2} = 1$, $x_2 = \dfrac{-5-9}{2 \cdot 2} = -3{,}5$.

куб тамыр

Без алдагы битләрдә квадрат тамыр төшенчәсен билгеләгән кебек, **куб тамыр** төшенчәсен дә билгеләргә мөмкин: **тискәре булмаган a саныннан куб тамыр** дип кубы a га тигез булган тискәре булмаган санны атыйлар. Башкача әйтсәк, $\sqrt[3]{a} = b$ тигезлеге $b^3 = a$ икәнен аңлата.

Мәсәлән, $\sqrt[3]{27} = 3$, чөнки $3^3 = 27$; $\sqrt[3]{64} = 4$, чөнки $4^3 = 64$; $\sqrt[3]{0{,}001} = 0{,}1$, чөнки $0{,}1^3 = 0{,}001$.

Тагы да алгарак китсәк, математикада *тискәре булмаган саннан n-нчы дәрәҗә* ($n = 2, 3, 4, \ldots$) *тамыр* төшенчәсе дә бар: әгәр $a \geqslant 0$ булса, $\sqrt[n]{a} = b$ язылышы $b \geqslant 0$ һәм $b^n = a$ икәнен аңлата. Мәсәлән, $\sqrt[4]{81} = 3$, чөнки $3 > 0$ һәм $3^4 = 81$; $\sqrt[5]{32} = 2$, чөнки $2 > 0$ һәм $2^5 = 32$. Без боларның барысын да 11 нче сыйныфның алгебра курсында өйрәнербез.

§11. ИРРАЦИОНАЛЬ САННАР

Без инде берничә тапкыр искәрттек, чынбарлык тормышта үзебез очрата торган саннарның барысы да рациональ булып бетми. Әйтик, катетлары 1 см һәм 2 см булган турыпочмаклы өчпочмакның гипотенузасы озынлыгы — рациональ сан түгел. Алдагы параграфта (3 нче мисал) күргәнебезчә, ул $\sqrt{5}$ см га тигез, ә $\sqrt{5}$ — рациональ сан түгел. $x^2 = 7$ тигезләмәсенең тамырлары да рациональ саннар була алмый ($\sqrt{7}$ һәм $-\sqrt{7}$). Рациональ булмаган бу нинди саннар соң?

Барыннан да элек шунысын искәртик, математикада «рациональ булмаган сан» дип сөйләмиләр, моның өчен *иррациональ*

сан атамасы кабул ителгән. «Рациональ сан» һәм «иррациональ сан» атамалары латинча *ratio* — «акыл» дигән сүздән килеп чыккан (сүзгә-сүз тәрҗемәсе: «рациональ сан — акылга ярашлы сан», «иррациональ сан — акылга ярашлы булмаган сан»; тормышта да шулай бит: «ул рациональ тәкъдим ясады», — димәк, ул акыллы фикер әйтте; «болай эшләү рациональ булмас» — болай эшләү акылга ярашлы түгел).

Хәзер безгә инде билгеле булган иррациональ $\sqrt{5}$ санын карыйк. § 10 та без аның 2 һәм 3, төгәлрәк әйтсәк, 2,2 һәм 2,3; тагын да төгәлрәк әйтсәк, 2,23 һәм 2,24 саннары арасындагы сан икәнен билгеләдек. $\sqrt{5}$ санын төгәлрәк бәяләүне дәвам итеп, өтердән соңгы өченче унарлы билгенең дә чикләрен табарга мөмкин. $2{,}236^2 = 4{,}999696$, бу 5 тән кечерәк; $2{,}237^2 = 5{,}004167$, бу 5 тән зуррак. Димәк, $2{,}236 < \sqrt{5} < 2{,}237$.

Нәкъ шундый юл белән өтердән соңгы дүртенче билгенең дә бишенче билгенең дә һ.б. чикләрен билгеләргә мөмкин. Якынча тигезлек $\sqrt{5} \approx 2{,}236$ үтәлә. Әгәр $\sqrt{5}$ саны өчен барлык унарлы тамгалар язылса, $\sqrt{5} = 2{,}236...$ язылышын кулланырга мөмкин; уңда чиксез унарлы вакланма. Алдагы параграфта без инде чиксез унарлы вакланмалар белән очрашкан идек, тик алар барысы да периодик һәм рациональ саннарны аңлаталар иде. Иррациональ $\sqrt{5}$ *периодик булмаган чиксез унарлы вакланма* белән бирелә.

иррациональ сан

Гомумән алганда, периодик булмаган чиксез унарлы вакланманы **иррациональ сан** дип атыйлар. Әгәр натураль n саны төгәл квадрат булмаса, ягъни $n \neq k^2$ (биредә $k \in N$) булса, $\sqrt{n}$ — иррациональ сан була. Мәсәлән, $\sqrt{7}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{101}$ — иррациональ саннар.

Иррациональ саннар квадрат тамыр алганда гына түгел, башка бик күп очракларда да очрыйлар, сез югары сыйныфларда моңа үзегез дә ышанырсыз. Хәзергә бер генә мисал китерәбез.

Әгәр теләсә кайсы әйләнәнең озынлыгын аның диаметрына бүлсәк, өлештә иррациональ 3,141592... саны килеп чыга. Бу сан өчен математикада махсус π тамгасы (грек алфавитының «пи» хәрефе; аны грекча әйләнә — *периферия* сүзенең беренче хәрефеннән алынган дип фаразлыйлар). 1766 елда немец математигы И. Ламберт π санының иррациональлеген исбатлый.

Рациональ саннар белән эшләнгән теләсә кайсы арифметик гамәл нәтиҗәсендә рациональ сан табыла. Бу аңлашыла да, чөнки гади вакланмаларның суммасы (аермасы, тапкырчыгышы, өлеше) — гади вакланма (барысы да тәртиптә, чөнки рациональ саннар — «акыллы» саннар бит!). Ә иррациональ саннар белән эшләр ничек? Төп-төгәл генә әйтеп тә булмый икән (дөрестән дә, иррациональ саннар — «акылга ярашлы» саннар түгел бит). Карагыз: $\sqrt{5}$ — иррациональ сан, ә $\sqrt{5} \cdot \sqrt{5} = \left(\sqrt{5}\right)^2 = 5$ — рациональ сан, ягъни ике иррациональ санның тапкырчыгышы рациональ сан булды; $\sqrt{5}$ һәм $\sqrt{3}$ — иррациональ саннар, ә аларның тапкырчыгышы $\sqrt{15}$ (§14 та без $\sqrt{5} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{15}$) икәнен исбатларбыз) — шулай ук иррациональ сан. Шундый ук хәл иррациональ саннарны кушканда, алганда һәм бүлгәндә дә күзәтелә: җавапта рациональ сан да, иррациональ сан да килеп чыгарга мөмкин.

Ә менә операциядә бер рациональ сан һәм бер иррациональ сан катнашса, кайсысы «җиңәр»? «Җиңү» иррациональ сан ягында икән. Бер мисал карыйк: рациональ 3 саны һәм иррациональ $\sqrt{2}$ саны бирелгән; аларның суммасы $3 + \sqrt{2}$ була. Бу сумманы рациональ r саны дип фаразлыйк, ягъни $3 + \sqrt{2} = r$. Ул чагында $\sqrt{2} = r - 3$, ә $r - 3$ — рациональ сан (чөнки ул ике рациональ санның аермасы). $\sqrt{2}$ — рациональ сан булып чыга, ә бу дөрес түгел, $\sqrt{2}$ — иррациональ сан. Капма-каршылыкка очрадык, димәк, безнең фаразыбыз дөрес түгел, ягъни $3 + \sqrt{2}$ — иррациональ сан. Шулай ук итеп $3 - \sqrt{2}$ нең дә

иррациональ сан икәнен исбатларга мөмкин. Ә менә иррациональ $3+\sqrt{2}$ һәм $3-\sqrt{2}$ саннарының суммасы 6 га тигез, ул рациональ сан була.

Искәрмә. Игътибар итегез, бу фикер йөртүләрдә без яңадан капма-каршысыннан чыгып исбатлау алымын кулландык (§ 10 та аның турында сөйләшкән идек).

Шулай итеп, *нәтиҗәләр* ясыйбыз.

- Рациональ саннар белән эшләнгән теләсә нинди арифметик гамәл (0 гә бүлүдән башка) нәтиҗәсендә рациональ сан табыла.
- Иррациональ саннар белән эшләнгән арифметик гамәл нәтиҗәсендә рациональ сан да, иррациональ сан да килеп чыга.
- Әгәр арифметик гамәлдә рациональ һәм иррациональ саннар катнашса, нәтиҗәдә иррациональ сан табыла (0 гә тапкырлаудан һәм бүлүдән башка).

иррациональ аңлатма

Уңай саннан квадрат һәм куб тамыр алу гамәле нәтиҗәсендә ешрак иррациональ сан табылганлыктан, үзгәрешледән квадрат һәм куб тамыр алу гамәле кергән алгебраик аңлатманы *иррациональ аңлатма* дип йөртергә килешкәннәр.

§12. РЕАЛЬ САННАР КҮПЛЕГЕ

Әгәр рациональ саннар күплегенә иррациональ саннар күплеген өстәсәк, алар **реаль саннар күплеген** төзиләр. Реаль саннар күплеген, гадәттә, $\boldsymbol{R}$ хәрефе белән билгелиләр; шулай ук $(-\infty; +\infty)$ яки $(-\infty; \infty)$ символик язылышын кулланалар.

Реаль саннар күплеген *чикле һәм чиксез унарлы вакланмалар күплеге* дип сурәтләргә мөмкин; чикле унарлы вакланмалар

һәм чиксез периодик унарлы вакланмалар — рациональ саннар, ә периодик булмаган чиксез унарлы вакланмалар — иррациональ саннар.

сүзлекчә

реаль сан

саннар турысы

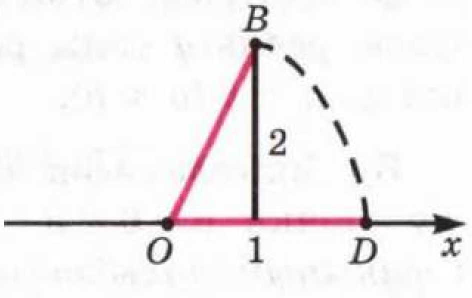
Һәр реаль санны координаталар турысындагы нокта белән күрсәтергә мөмкин. Киресе дә дөрес: координаталар турысындагы һәр ноктаның реаль координатасы бар. Математиклар гадәттә болай диләр: реаль саннар күплеге $\boldsymbol{R}$ һәм координаталар турысы нокталары арасында *үзара беркыйммәтле тиңдәшлек* урнашкан. Координаталар турысы — реаль саннар күплегенең геометрик моделе ул; шуңа күрә координаталар турысы өчен еш кына **саннар турысы** атамасын кулланалар.

Бу атама сезгә гайре табигый булып тоелмыймы? Чөнки *сан* — алгебра атамасы, ә *туры* — геометрия атамасы бит. Биредә «жанрлар кушылмасы» килеп чыкмаганмы? Юк, барысы да уйланган, барысы да дөрес. Бу атама тагын бер тапкыр математиканың төрле өлкәләре бердәмлеген ассызыклый, «реаль сан» һәм «координаталар (саннар) турысындагы нокта» төшенчәләрен бердәйләштерә.

игътибар итегез

Игътибар итегез: координаталар турысын сез 5 нче сыйныфтан башлап кулланасыз. Ә менә үзегезнең белемнәрдә «ак тап»ны сизмәгәнсез: координаталар турысындагы һәр ноктаның да координатасын сез таба алмаган булыр идегез (укытучыгыз сезне бу эштән саклап килгән).

Мисал карыйбыз. Координаталар турысы бирелгән, аның берәмлек кисемтәсен катет дип алып, турыпочмаклы өчпочмак төзелгән, аның икенче катеты 2 гә тигез (рәс. 5). Өчпочмакның OB гипотенузасы координаталар турысында O ноктасыннан уңга салынган һәм D ноктасы табылган. D ноктасының координатасы ничәгә тигез? Ул гипотенузага, ягъни $\sqrt{5}$ кә тигез. Без инде



Рәс. 5

беләбез, бу сан — бөтен сан да, вакланма да түгел. Димәк, D ноктасының координатасын сез 5 нче сыйныфта да, 6 да, 7 дә дә таба алмас идегез. Шуңа күрә без хәзергә кадәр «саннар турысы» дип түгел, ә «координаталар турысы» дип сөйләштек.

Сезнең алгебра буенча белемнәрдә тагын бер өзеклекне аклап була. Үзгәрешлеләр кергән аңлатмаларны тикшергәндә, без һәрвакыт үзгәрешлеләр мөмкин табылган теләсә нинди кыйммәтләр алырга мөмкин, дидек, тик рациональ кыйммәтләрне генә күз алдында тоттык, чөнки башкалары юк иде. Ә чынлыкта үзгәрешлеләр мөмкин табылган теләсә нинди реаль кыйммәтләр алырга мөмкиннәр. Мәсәлән,

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

бердәйлегендә a һәм b ролендә рациональ генә түгел, теләсә нинди саннар була ала.

Реаль a, b, c саннары өчен гадәттәге законнар үтәлә:

$$a + b = b + a;$$

$$ab = ba;$$

$$a + (b + c) = (a + b) + c;$$

$$a(bc) = (ab)c;$$

$$(a + b)c = ac + bc \text{ h.б.}$$

Гадәттәге кагыйдәләр дә үтәлә:

ике уңай санның тапкырчыгышы (өлеше) — уңай сан;

ике тискәре санның тапкырчыгышы (өлеше) — уңай сан;

уңай һәм тискәре санның тапкырчыгышы (өлеше) — тискәре сан.

Реаль саннарны, түбәндәге билгеләмәне кулланып, бер-берсе белән чагыштырырга мөмкин.

<u>*Билгеләмә*</u>. Әгәр аермалары $a - b$ — уңай (тискәре) сан булса, реаль a саны реаль b санынннан **зуррак (кечерәк)** була, диләр. $a > b$ $(a < b)$.

Бу билгеләмәдән *теләсә нинди уңай a санының нульдән зур* (чөнки $a - 0 = a$ — уңай сан), ә *теләсә нинди тискәре b санының нульдән кечкенә* (чөнки $b - 0 = b$ — тискәре сан) булуы килеп чыга.

Шулай итеп, $a > 0$ булудан a — уңай сан;
$a < 0$ дән a — тискәре сан;
$a > b$ дан $a - b$ — уңай сан, ягъни $a - b > 0$;
$a < b$ дан $a - b$ — тискәре сан, ягъни $a - b < 0$
икәнлеге килеп чыга

Катгый тигезсезлек тамгалары (<, >) белән беррәттән *катгый булмаган тигезсезлек* тамгаларын да кулланалар:

$a \geqslant 0$ a ның нульдән зур яки нульгә тигез, ягъни a ның *тискәре булмаган сан* (уңай яки 0) икәнен, яки a ның нульдән кечерәк түгел икәнен аңлата;

$a \leqslant 0$ a ның нульдән кечкенә яки нульгә тигез, ягъни a ның *уңай булмаган сан* (тискәре яки 0) икәнен, яки a ның нульдән зуррак түгел икәнен аңлата;

$a \geqslant b$ a ның b дан зур яки тигез, ягъни $a - b$ — тискәре булмаган сан икәнен, яки a b дан кечерәк түгел; $a - b \geqslant 0$ икәнен аңлата.

$a \leqslant b$ a ның b дан кечерәк яки тигез, ягъни $a - b$ — уңай булмаган сан икәнен яки a b дан зуррак түгел; $a - b \leqslant 0$ икәнен аңлата.

Мәсәлән, теләсә нинди a саны өчен $a^2 \geqslant 0$ тигезлеге дөрес; теләсә нинди a һәм b саннары өчен $(a - b)^2 \geqslant 0$ тигезсезлеге дөрес.

Реаль саннарны чагыштыру өчен, һәр очракта аларның аермаларын төзеп, аның уңаймы, әллә тискәреме икәнен ачыклау мәҗбүри түгел. Саннарның унарлы вакланмалар рәвешендәге язылышларын чагыштырып та нәтиҗә ясарга мөмкин.

Реаль саннар күплегенең геометрик моделе, ягъни саннар турысы саннарны чагыштыру операциясен күрсәтмәлерәк итә: *a һәм b саннарының саннар турысында уңдарак ятканы зуррак була.*

Шулай итеп, реаль саннарны чагыштыруга төрлечә якын килергә мөмкин. Хәзер без аны мисалда карап үтәрбез.

1 нче мисал. Саннарны чагыштырырга:

а) $\frac{22}{5}$ һәм 4; б) $2 + \sqrt{5}$ һәм 5; в) $-3{,}7$ һәм $\sqrt{2}$; г) $-\sqrt{5}$ һәм $-\sqrt{7}$.

Чишү. а) $\frac{22}{5} - 4 = \frac{2}{5}$; $\frac{2}{5} > 0$, димәк, $\frac{22}{5} > 4$;

б) $2 + \sqrt{5} = 2 + 2{,}236... = 4{,}236...$; $4{,}236... < 5$; шулай итеп, $2 + \sqrt{5} < 5$;

в) $-3{,}7$ — тискәре сан, $\sqrt{2}$ — уңай сан. Теләсә кайсы тискәре сан теләсә кайсы уңай саннан кечерәк була, шуңа күрә $-3{,}7 < \sqrt{2}$;

г) $-\sqrt{5} = -2{,}23...$; $-\sqrt{7} = -2{,}64...$. Координаталар турысында $-2{,}64...$ ноктасы $-2{,}23...$ ноктасыннан сулдарак урнаша, димәк, $-\sqrt{5} > -\sqrt{7}$. ■

2 нче мисал. Саннарны үсә бару тәртибендә урнаштырырга:

$$\sqrt{2},\ -\sqrt{3},\ -2,\ \frac{\pi}{2},\ \sqrt{17},\ \pi.$$

Чишү. $\sqrt{2} \approx 1{,}41$, $\sqrt{3} \approx 1{,}73$, $\pi \approx 3{,}14$, $\frac{\pi}{2} \approx 1{,}57$, $\sqrt{17} \approx 4{,}12$ булудан файдаланабыз. Хәзер бирелгән саннарны үсә бару тәртибендә язарга була:

$$-2,\ -\sqrt{3},\ \sqrt{2},\ \frac{\pi}{2},\ \pi,\ \sqrt{17}.$$ ■

§13. $y = \sqrt{x}$ ФУНКЦИЯСЕ, АНЫҢ ҮЗЛЕКЛӘРЕ ҺӘМ ГРАФИГЫ

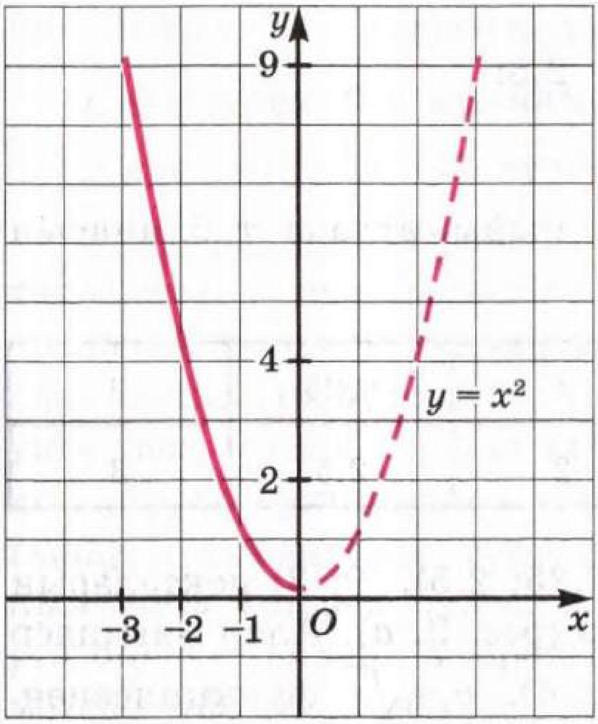
7 нче сыйныфта без $y = C$, $y = kx$, $y = kx + m$, $y = x^2$, $y = -x^2$ функцияләрен өйрәнеп, шундый нәтиҗәгә килдек: $y = f(x)$ рәвешендәге ике үзгәрешле кергән тигезләмә (функция) бәйсез үзгәрешле x ның (аргументның) конкрет кыйммәтен биреп, бәйле үзгәрешле y ның тиңдәшле кыйммәтен исәпләү өчен уңайлы математик модель икән. Мәсәлән, әгәр $y = x^2$,

ягъни $f(x) = x^2$ функциясе бирелсә, $x = 1$ булганда $y = 1^2 = 1$ не табабыз; кыскарак $f(1) = 1$ дип язабыз. $x = 2$ булганда, $f(2) = 2^2 = 4$, ягъни $y = 4$; $x = -3$ булганда, $f(-3) = (-3)^2 = 9$, ягъни $y = 9$ һ.б.

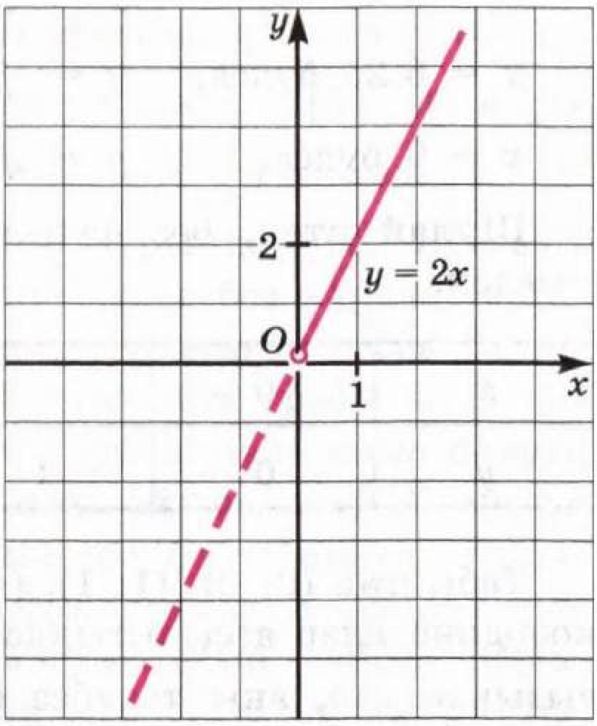
Инде 7 нче сыйныфта ук без сезнең белән $y = f(x)$ тигезлегендә $f(x)$ аңлатмасының алда санап үтелгән биш очрак (C, kx, $kx + m$, x^2, $-x^2$) белән генә чикләнмәвен аңлый башлаган идек. Мәсәлән, безгә инде *кисәкле функцияләр*, ягъни төрле аралыкларда төрле формулалар белән бирелгән функцияләр очрады. Менә шундый $y = f(x)$ функциясенең берсе:

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leqslant 0 \text{ булганда;} \\ 2x, & x > 0 \text{ булганда.} \end{cases}$$

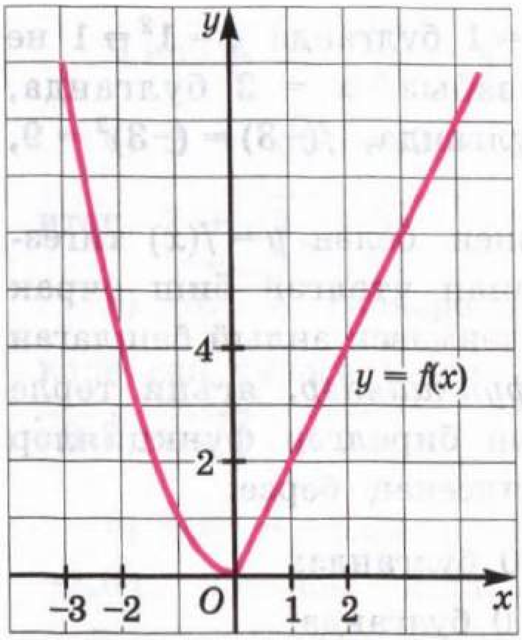
Мондый функциянең графигын ничек төзергә? Башта $y = x^2$ параболасын төзергә һәм аның $x \leqslant 0$ булгандагы өлешен (параболаның уң тармагын, рәс. 6) алырга, аннан соң $y = 2x$ турысын төзеп, $x > 0$ булгандагы өлешен алырга (рәс. 7) кирәк. Һәм, ниһаять, аерып алынган ике өлешне бер рәсемдә берләштерергә, ягъни бер координаталар яссылыгында төзергә кирәк (рәс. 8).



Рәс. 6



Рәс. 7



Рәс. 8

Хәзер безнең бурыч өйрәнелгән функцияләр запасын тулыландырудан гыйбарәт. Реаль тормышта, без алда санап үтелгәннәрдән тыш, $y = f(x)$ рәвешендәге төрле математик модельләр белән сурәтләнә торган хәлләр очрый. Бу параграфта без $y = \sqrt{x}$ функциясен тикшерәбез.

$y = \sqrt{x}$ функциясенең графигын төзү өчен, гадәттә, бәйсез x үзгәрешлесенә берничә конкрет кыйммәт (тискәре булмаган, чөнки $x < 0$ булганда $\sqrt{x}$ аңлатмасының мәгънәсе юк) бирербез һәм y үзгәрешлесенең тиңдәшле кыйммәтен исәпләрбез. Билгеле инде, x ка квадрат тамырның кыйммәте төгәл билгеле булган кыйммәтләр генә бирәбез:

$x = 0$ булса, $y = \sqrt{0} = 0$;

$x = 1$ булса, $y = \sqrt{1} = 1$;

$x = 4$ булса, $y = \sqrt{4} = 2$;

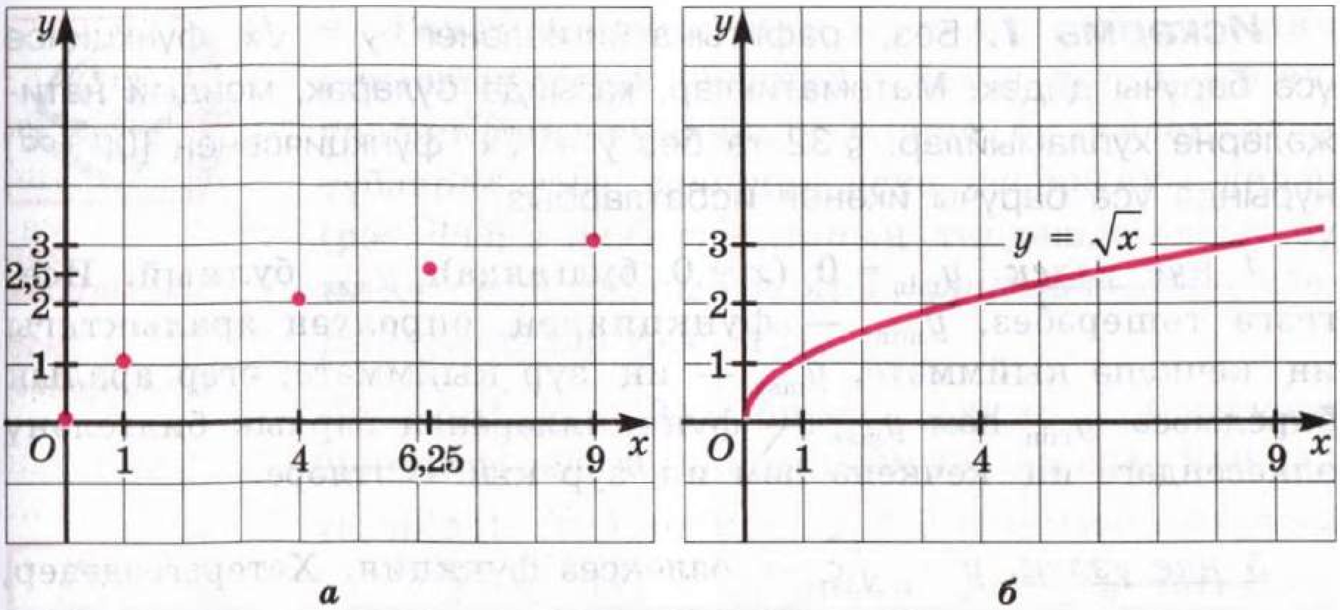
$x = 6{,}25$ булса, $y = \sqrt{6{,}25} = 2{,}5$;

$x = 9$ булса, $y = \sqrt{9} = 3$.

Шулай итеп, без функциянең кыйммәтләре таблицасын төзедек:

x	0	1	4	6,25	9
y	0	1	2	2,5	3

Табылган (0; 0), (1; 1), (4; 2), (6,25; 2,5), (9; 3) нокталарын координаталар яссылыгында төзибез (рәс. 9, *а*). Алар ниндидер сызыкта ята, аны төзибез (рәс. 9, *б*). $y = \sqrt{x}$ функциясенең графигын таптык. Игътибар итегез: график y *күчәренә* (0; 0)



Рәс. 9

ноктасында *орына* ((0; 0) ноктасына x күчәренә туры почмак ясап диярлек килеп керә). Шунысы кызык: $y = x^2$ параболасының шаблоны ярдәмендә $y = \sqrt{x}$ функциясе графигы бик җиңел төзелә, тик өскә түгел, уңга гына юнәлтелә ($x = y^2$).

$y = \sqrt{x}$ функциясенең үзлекләре

Бу функциянең үзлекләрен сурәтләгәндә, аның геометрик моделенә — парабола тармагына нигезләнербез (рәс. 9, *б*).

1 нче үзлек. Функциянең билгеләнү өлкәсе — $[0; +\infty)$ нуры.

2 нче үзлек. $x = 0$ булганда, $y = 0$; $x > 0$ булганда, $y > 0$.

3 нче үзлек. Функция $[0; +\infty)$ нурында үсә. Исегезгә төшерегез, 7 нче сыйныф алгебра курсында без карала торган аралыкта графигы сулдан уңга таба тауга менгән кебек барган функцияне *үсә баручы* дип, билгеле аралыкта графигы сулдан уңга таба таудан төшкән кебек барган функцияне *кими баручы* дип атарга булган идек. Төгәлрәк итеп әйтсәк, әгәр X аралыгында аргументның зуррак кыйммәтенә функциянең зуррак кыйммәте тиңдәш булса, $y = f(x)$ функциясен *X аралыгында үсә баручы* диләр; X аралыгында аргументның зуррак кыйммәтенә функциянең кечерәк кыйммәте туры килсә, $y = f(x)$ функциясен *X аралыгында кими баручы* диләр.

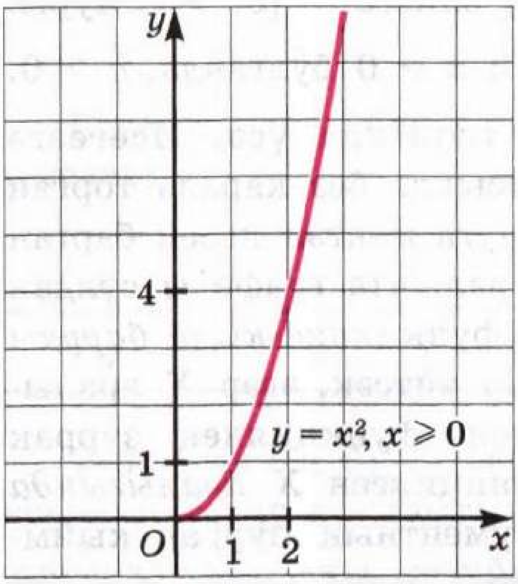
Искәрмә 1. Без, графигына нигезләнеп, $y = \sqrt{x}$ функциясе үсә баручы дидек. Математиклар, кагыйдә буларак, мондый нәтиҗәләрне хупламыйлар. § 32 та без $y = \sqrt{x}$ функциясенең $[0; +\infty)$ нурында үсә баручы икәнен исбатларбыз.

4 нче үзлек. $y_{min} = 0$ ($x = 0$ булганда), y_{max} булмый. Исегезгә төшерәбез, y_{min} — функциянең бирелгән аралыктагы иң кечкенә кыйммәте, y_{max} — иң зур кыйммәте; әгәр аралык бирелмәсә, y_{min} һәм y_{max} — функцияләренең барлык билгеләнү өлкәсендәге иң кечкенә һәм иң зур кыйммәтләре.

5 нче үзлек. $y = \sqrt{x}$ — өзлексез функция. Хәтерегездәдер, бу атаманы без хәзергә «функциянең графигы — карандашны кәгазьдән аермыйча сызып була торган тоташ сызык» дигән җөмләнең синонимы кебек кулланабыз. Югары сыйныфларда функциянең өзлексезлеге төшенчәсенә, аның геометрик сурәтенә нигезләнмәгән төгәл математик аңлатма биреләчәк.

игътибар итегез

Ә хәзер бер кызык күренешкә игътибар итегез. Ике функцияне тикшерәбез: $y = \sqrt{x}$ (аның графигы 9, *б* рәсемдә) һәм $y = x^2$, биредә $x \geqslant 0$ (аның графигы 10 нчы рәсемдә). Без хәзер генә беренче функциянең биш үзлеген санап чыктык, тик нәкъ шул биш үзлеккә икенче функция дә ия. Төрле ике функциянең сүз белән бирелгән «портретлары» бер үк. Математиклар графиклары төрле булган төрле функцияләрнең бер үк сүзләр белән сурәтләнүен кичерә алмаганнар. Алар графикларның принципиаль аермалыкларын тапканнар: $y = \sqrt{x}$ функциясе графигының *кабарынкылыгы белән өскә* юнәлгәнен, ә $y = x^2$ $(x \geqslant 0)$ функциясе графигының *кабарынкылыгы белән аска* юнәлгәнен билгеләгәннәр.



Рәс. 10

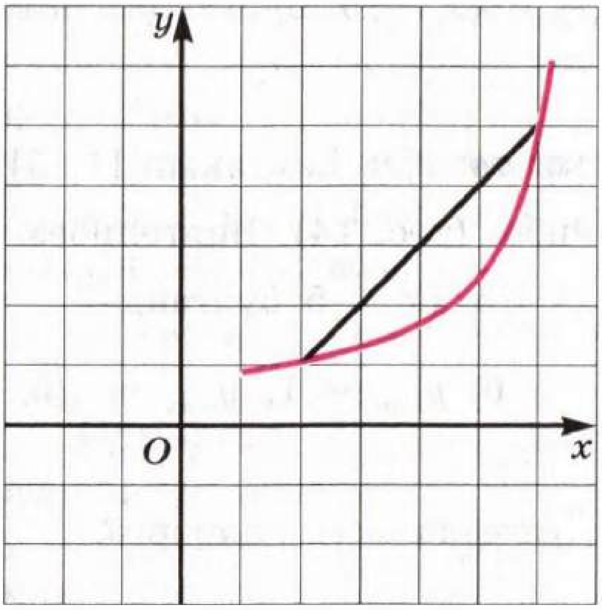
аска кабарынкы

өскә кабарынкы

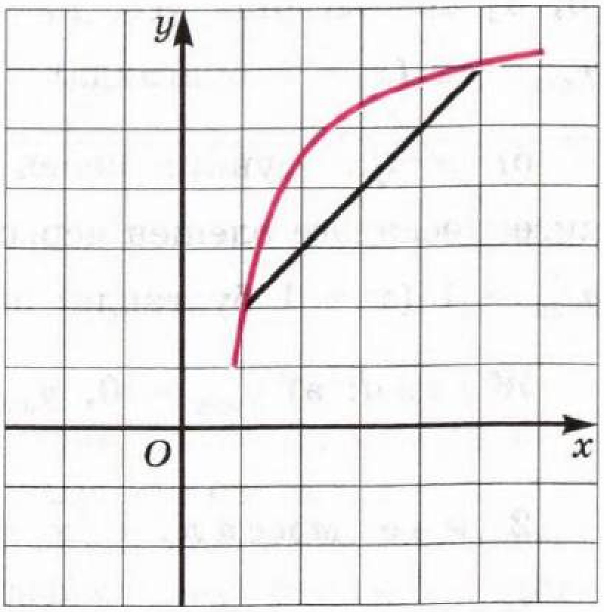
Гадәттә, функциянең теләсә нинди ике ноктасын туры кисемтәсе белән тоташтыргач, графикның тиңдәшле өлеше бу кисемтәдән түбәнрәк ятса, *функция аска кабарынкы* диләр (рәс. 11); ә инде графикның тиңдәшле өлеше бу кисемтәдән югарырак ятса, *функция өскә кабарынкы*, диләр (рәс. 12).

функциянең кыйммәтләре өлкәсе

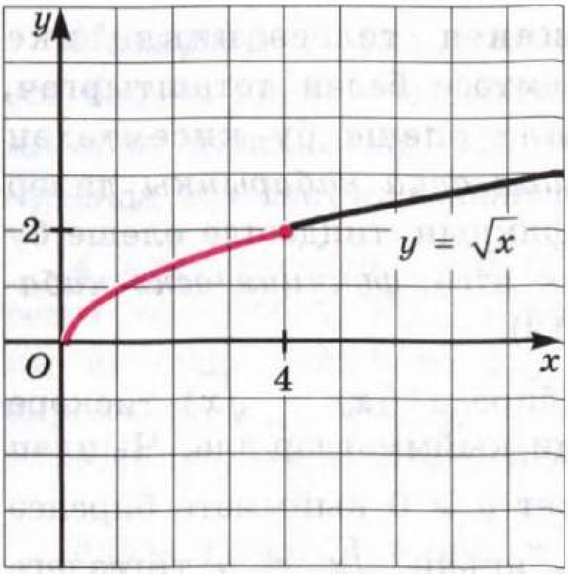
Функция $y = f(x)$ (биредә $f(x) = \sqrt{x}$) тискәре булмаган теләсә нинди кыйммәтләр ала. Чынлап та, нинди генә конкрет $y \geqslant 0$ кыйммәте бирелсә дә, x ның $f(x) = y$, ягъни $\sqrt{x} = y$ тигезлеге үтәлә торган кыйммәте һәрвакыт табылачак. Функциянең барлык кыйммәтләре күплеген, гадәттә, **функциянең кыйммәтләре өлкәсе** дип атыйлар. $y = \sqrt{x}$ функциясе өчен кыйммәтләр өлкәсе $[0; +\infty)$ нуры була. Бу функциянең графигыннан яхшы укыла (рәс. 9, *б*). Әгәр графикны y күчәренә проекцияләсәк, нәкъ менә $[0; +\infty)$ нуры табыла.



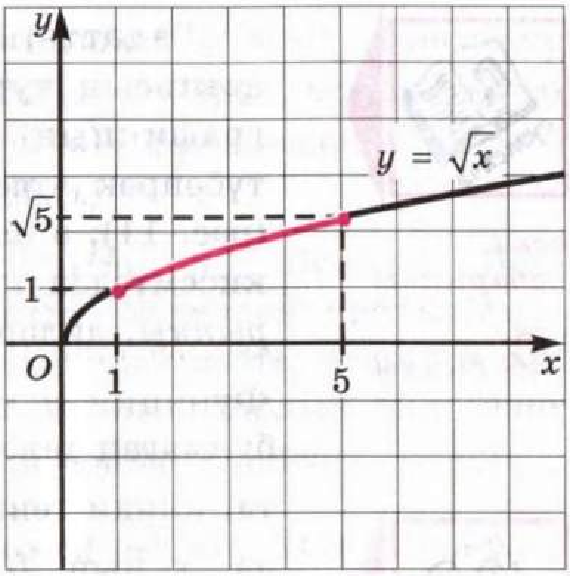
Рәс. 11



Рәс. 12



Рәс. 13



Рәс. 14

1 нче мисал. $y=\sqrt{x}$ функциясенең: а) [0; 4]; б) [1; 5] аралыгындагы иң кечкенә һәм иң зур кыйммәтләрен табарга.

Чишү. а) $y=\sqrt{x}$ функциясенең графигын төзик һәм аның [0; 4] кисемтәдәге өлешен аерып алыйк (рәс. 13). Билгелибез, $y_{min} = 0$ ($x = 0$ булганда), ә $y_{max} = 2$ ($x = 4$ булганда).

График сурәткә таянмасак та була иде: $y=\sqrt{x}$ функциясе [0; 4] аралыгында үсә, димәк, $y_{min} = 0$ ($x = 0$ булганда) һәм $y_{max} = 2$ ($x = 4$ булганда).

б) $y=\sqrt{x}$ функциясенең графигын төзибез һәм аның [1; 5] кисемтәсендәге өлешен аерып билгелибез (рәс. 14). Билгелибез: $y_{min} = 1$ ($x = 1$ булганда) һәм $y_{max} = \sqrt{5}$ ($x = 5$ булганда).

Җавап: а) $y_{min} = 0$, $y_{max} = 2$; б) $y_{min} = 1$, $y_{max} = \sqrt{5}$.

2 нче мисал. $\sqrt{x} = 6 - x$ тигезләмәсен чишәргә.

Чишү. «Алгебра—7» дәреслегендә без тигезләмәләрне график юл белән чишү алгоритмын эшләгән идек.

$f(x) = g(x)$ тигезләмәсен график юл белән чишү өчен:

1) $y = f(x)$ һәм $y = g(x)$; функцияләре карала;

2) $y = f(x)$ функциясенең графигы төзелә;

3) $y = g(x)$ функциясенең графигы төзелә;

4) төзелгән графикларның кисешү нокталары табыла; бу нокталарның абсциссалары $f(x) = g(x)$ тигезләмәсенең тамырлары.

Бу алгоритмны бирелгән тигезләмәгә кулланабыз.

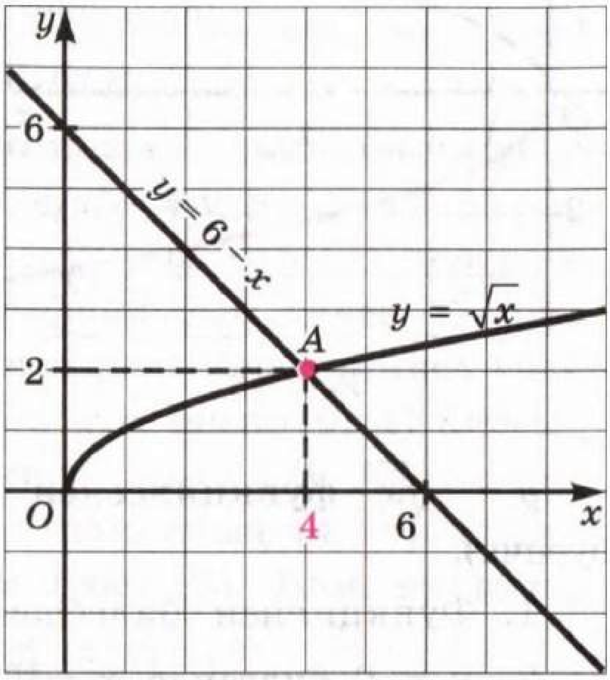
1) $y = \sqrt{x}$ һәм $y = 6 - x$ функцияләрен карыйбыз.

2) $y = \sqrt{x}$ функциясенең графигын төзибез (рәс. 15).

3) Сызыкча $y = 6 - x$ функциясенең графигын төзибез. Бу туры ике ноктасы: (0; 6) һәм (6; 0) нокталары буенча төзелә. Туры да шул ук сызымда эшләнә (рәс. 15).

4) Сызым буенча графикларның $A(4;\ 2)$ ноктасында кисешүен табабыз. Бу чынлап та шулаймы? Тикшерәбез: (4; 2) пары $y = \sqrt{x}$, тигезләмәсен дә, $y = 6 - x$ тигезләмәсен дә канәгатьләндерә. Димәк, (4; 2) ноктасы чынлап та төзелгән графикларның кисешү ноктасы була. Бирелгән тигезләмәнең бер тамыры бар: 4 һәм ул A ноктасының абсциссасы.

Җавап: 4.

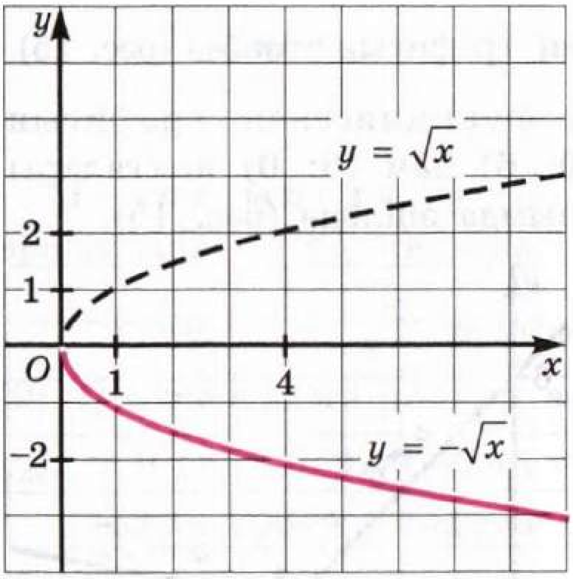


Рәс. 15

Искәрмә 2. Тигезләмәләрне график юл белән чишүгә бәйләнгән бер үзенчәлекле моментка игътибар итегез. Без, $y = \sqrt{x}$ һәм $y = 6 - x$ функцияләре графикларының (4; 2) ноктасында кисешүен күреп, сызымга ышандык һәм бу — графикларның бердәнбер уртак ноктасы дип, шуңа күрә тигезләмәнең бердәнбер тамыры $x = 4$ бар дип яздык. Әмма ышану бер нәрсә, аны тикшерү дә кирәк.

Чынлыкта исә сызымнан башка гына графикларның башка кисешү нокталары юклыгын катгый исбатларга кирәк иде. Мәсәлән, болай: $y = \sqrt{x}$ функциясе үсә баручы, димәк, $x > 4$ булганда, функциянең кыйммәтләре 2 дән зуррак, ә $x < 4$ булганда, аның кыйммәтләре 2 дән кечерәк. Ә $y = 6 - x$ функциясе кими баручы, димәк, $x > 4$ булганда, функциянең кыйммәтләре 2 дән кечерәк, ә $x < 4$ булганда, функциянең кыйммәтләре 2 дән зуррак. Шулай итеп, (4; 2) ноктасыннан башка нокталарда функцияләр кисешә алмыйлар.

3 нче мисал. $y = -\sqrt{x}$ функциясенең графигын төзергә һәм укырга.

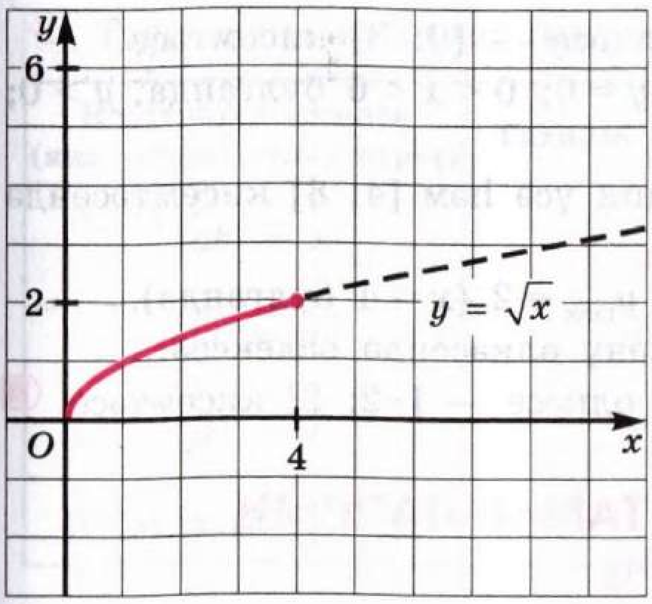


Рәс. 16

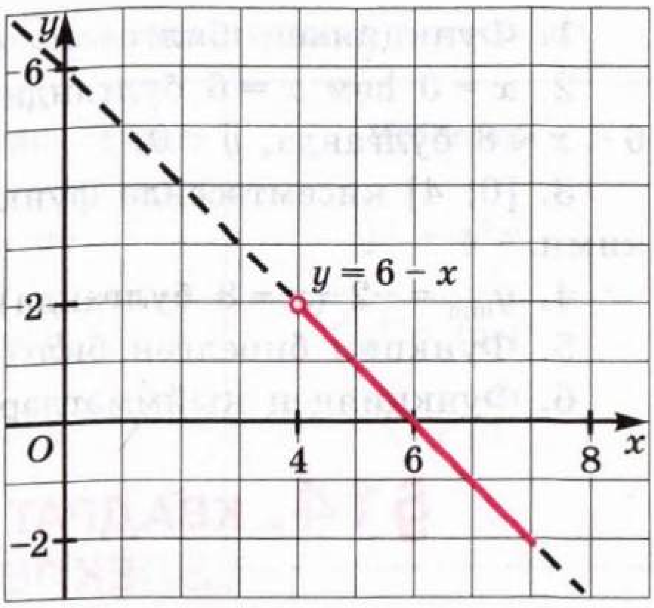
Чишү. Без 7 нче сыйныфның алгебра курсында $y = -f(x)$ функциясенең графигы $y = f(x)$ функциясе графигыннан x күчәренә карата симметрияле рәвешүзгәртү ярдәмендә табылуын өйрәнгән идек. Шуннан файдаланып, $y = \sqrt{x}$ функциясенең графигын төзибез һәм аны x күчәренә карата симметрияле итеп чагылдырабыз (рәс. 16). Бу инде $y = -\sqrt{x}$ графигы була.

$y = -\sqrt{x}$ функциясенең үзлекләрен санап үтик (графигы буенча).

1. Функциянең билгеләнү өлкәсе — $[0; +\infty)$ нуры.
2. $y = 0$ булганда $x = 0$; $y < 0$ булганда $x > 0$.
3. Функция $[0; +\infty)$ нурында кими.
4. $y_{max} = 0$ ($x = 0$ булганда), y_{min} булмый.
5. Функция $[0; +\infty)$ нурында өзлексез.
6. Функциянең кыйммәтләре күплеге — $(-\infty; 0]$ нуры.
7. Функция аска таба кабарынкы.



Рәс. 17

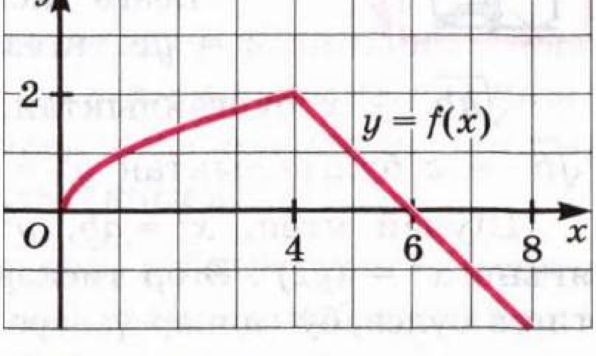


Рәс. 18

4 нче мисал. $y = f(x)$ функциясенең графигын төзегез һәм укыгыз:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & 0 \leqslant x \leqslant 4 \text{ булганда;} \\ 6 - x, & 4 < x \leqslant 8 \text{ булганда.} \end{cases}$$

Чишү. Бирелгән сүз кисәкле функция, ягъни билгеләнү өлкәсенең төрле аралыкларында төрле формулалар белән бирелгән функция графигын төзү турында бара. Параграф башында без мондый функцияләр графикларын ничек төзергә кирәген исегезгә төшергән идек. Башта $y = \sqrt{x}$ функциясе графигын (параболаның тармагы) төзергә һәм аның [0; 4] кисемтәсендәге өлешен аерып күрсәтергә кирәк (рәс. 17). Аннан соң $y = 6 - x$ турысының графигы төзелә һәм аның (4; 8] ярыминтервалындагы өлеше аерып алына (рәс. 18). Һәм, ниһаять, аерып күрсәтелгән ике өлешне дә бер үк координаталар системасында сурәтләргә кирәк — бу кисәкле функциянең графигы була (рәс. 19).



Рәс. 19

Графикны уку — функциянең әлеге графикта сурәтләнгән үзлекләрен санап чыгу дигән сүз.

1. Функциянең билгеләнү өлкәсе — [0; 8] кисемтәсе.

2. $x = 0$ һәм $x = 6$ булганда, $y = 0$; $0 < x < 6$ булганда, $y > 0$; $6 < x \leqslant 8$ булганда, $y < 0$.

3. [0; 4] кисемтәсендә функция үсә һәм [4; 8] кисемтәсендә кими.

4. $y_{min} = -2$ ($x = 8$ булганда), $y_{max} = 2$ ($x = 4$ булганда).

5. Функция бирелгән билгеләнү өлкәсендә өзлексез.

6. Функциянең кыйммәтләре өлкәсе — [–2; 2] кисемтәсе.

§14. КВАДРАТ ТАМЫРЛАРНЫҢ ҮЗЛЕКЛӘРЕ

Без әлегә кадәр саннар белән биш арифметик операция: кушу, алу, тапкырлау, бүлү һәм дәрәҗәгә күтәрү гамәлләрен эшләдек һәм аларның төрле үзлекләрен, мәсәлән,

$$a + b = b + a, \qquad a^n \cdot b^n = (ab)^n$$

һ.б. ны актив кулланып килдек.

Бу бүлектә яңа операция — тискәре булмаган саннан квадрат тамыр алу кертелә. Аннан уңайлы файдалану өчен, бу гамәлнең үзлекләре белән танышырга кирәк, һәм бу параграфта без шуның белән шөгыльләнербез.

Теорема 1. ***Тискәре булмаган ике сан тапкырчыгышыннан квадрат тамыр бу саннардан квадрат тамырлар тапкырчыгышына тигез:***

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}.$$

Исбатлау. Түбәндәгечә билгеләнешләр кертәбез: $\sqrt{ab} = x$, $\sqrt{a} = y$, $\sqrt{b} = z$.

Безгә тискәре булмаган x, y, z саннары өчен $x = yz$ тигезлеге үтәлүен исбатларга кирәк.

$\sqrt{ab} = x$ булганлыктан, $x^2 = ab$. Шулай ук $\sqrt{a} = y$ һәм $\sqrt{b} = z$ булганлыктан $y^2 = a$ һәм $z^2 = b$.

Шулай итеп, $x^2 = ab$, $y^2 = a$, $z^2 = b$. Ул вакытта $x^2 = y^2z^2$, ягъни $x^2 = (yz)^2$. Әгәр тискәре булмаган саннарның квадратлары тигез булса, бу саннар үзләре дә тигез була, димәк, $x^2 = (yz)^2$ тигезләмәсеннән $x = yz$ килеп чыга. Шуны исбат итәргә кирәк иде дә.

Теореманы исбатлауның кыскача язылышын китерәбез.

Исбатлауга әзерлек (яңа үзгәрешлеләр кертү)	**Гадирәк телгә күчерү**	**Исбатлау**
$\sqrt{ab} = x$	$x^2 = ab$	$x^2 = y^2z^2$
$\sqrt{a} = y$	$y^2 = a$	$x^2 = (yz)^2$
$\sqrt{b} = z$	$z^2 = b$	$x = yz$
Исбатларга: $x = yz$		

Әле исбатланган теоремадан $\sqrt{5} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{15}$ икәне килеп чыга, без аны § 11 та кулланган идек.

Искәрмә 1. Теорема тамыр астындагы аңлатма тискәре булмаган икедән күбрәк тапкырлаучы тапкырчыгышы булып торганда да дөрес.

Искәрмә 2. 1 нче теореманы «әгәр..., була» конструкциясен кулланып формалаштырырга мөмкин (математикада шулай кабул ителгән): әгәр a һәм b — тискәре булмаган саннар булса, $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ тигезлеге дөрес була. Алдагы теореманы нәкъ шулай формалаштырабыз.

Теорема 2. ***Әгәр $a \geqslant 0$, $b > 0$ булса,***

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

тигезлеге дөрес була.

(Практикада болай әйтү уңайлырак: *вакланмадан квадрат тамыр тамырларның вакланмасына тигез яки өлештән тамыр тамырларның өлешенә тигез.*)

Исбатлау. Бу юлы без бары тик исбатлауның кыскача язылышын гына бирәбез, ә сез 1 нче теореманы исбатлагандагы аңлатмаларга охшаган аңлатулар ясарга тырышыгыз.

Исбатлауга әзерлек (яңа үзгәрешлеләр кертү)	Гадирәк телгә күчерү	Исбатлау
$\sqrt{\frac{a}{b}} = x$ $\sqrt{a} = y$ $\sqrt{b} = z$	$x^2 = \frac{a}{b}$ $y^2 = a$ $z^2 = b$	$x^2 = \frac{y^2}{z^2}$ $x^2 = \left(\frac{y}{z}\right)^2$ $x = \frac{y}{z}$
Исбатларга: $x = \frac{y}{z}$		

1 нче мисал. Исәпләргә: $\sqrt{36 \cdot 64 \cdot 9}$.

Чишү. Квадрат тамырларның беренче үзлегеннән (теорема 1) файдаланып табабыз:

$$\sqrt{36 \cdot 64 \cdot 9} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{64} \cdot \sqrt{9} = 6 \cdot 8 \cdot 3 = 144.$$

Искәрмә 3. Әйтергә кирәк, бу мисалны сез башкача да чишә аласыз. Әйтик, кулыгызда микрокалькулятор булганда, 36, 64, 9 саннарын тапкырлап, тапкырчыгыштан квадрат тамыр алырга мөмкин. Әмма алда бирелгән чишелеш культуралырак санала.

2 нче мисал. Исәпләргә: $\sqrt{10\frac{9}{16}}$.

Чишү. $10\frac{9}{16}$ катнаш санын аралаш вакланмага әйләндерәбез: $10\frac{9}{16} = 10 + \frac{9}{16} = \frac{169}{16}$. Квадрат тамырларның икенче үзлеген (теорема 2) файдаланып табабыз:

$$\sqrt{\frac{169}{16}} = \frac{\sqrt{169}}{\sqrt{16}} = \frac{13}{4} = 3\frac{1}{4}.$$

Җавап: $\sqrt{10\frac{9}{16}} = 3\frac{1}{4}$.

3 нче мисал. Исәпләргә: $\sqrt{37^2 - 12^2}$.

Чишү.

I юл. Эзлекле рәвештә табабыз: $37^2 = 1369$, $12^2 = 144$, $37^2 - 12^2 = 1369 - 144 = 1225$, $\sqrt{1225} = 35$.

II юл. $37^2 - 12^2 = (37 - 12)(37 + 12) = 25 \cdot 49$,

$$\sqrt{25 \cdot 49} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{49} = 5 \cdot 7 = 35.$$

Искәрмә 4. Беренче юл белән без турыдан-туры исәпләдек. Икенче юл нәфисрәк: без $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ формуласын һәм квадрат тамырлар үзлеген кулландык.

Искәрмә 5. Кайбер «акыллы башлар» кайвакыт 3 нче мисалны болай чишәргә тәкъдим итә:

$$\sqrt{37^2 - 12^2} = \sqrt{37^2} - \sqrt{12^2} = 37 - 12 = 25.$$

игътибар итегез

Бу, билгеле, дөрес түгел: сез күреп торасыз, нәтиҗәдә без алда чишкәндәге җавапны алмадык. Эш шунда: $\sqrt{a - b} = \sqrt{a} - \sqrt{b}$ үзлеге дә юк һәм $\sqrt{a + b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ үзлеге дә юк. Бары тик квадрат тамырларны тапкырлауга һәм бүлүгә караган үзлекләр генә бар. Тик игътибарлы һәм сак булыгыз, әлеге хата бик еш кабатлана!

4 нче мисал. Исәпләргә: а) $\sqrt{24} \cdot \sqrt{6}$; б) $\sqrt{24} : \sqrt{6}$.

Чишү. Алгебрада теләсә нинди формула уңнан сулга гына түгел, сулдан уңга да кулланыла. Әйтик, квадрат тамырларның беренче үзлеге буенча, кирәк булганда $\sqrt{ab}$ ны $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ рәвешендә күрсәткән кебек, киресенчә, $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ ны $\sqrt{ab}$ аңлатмасы белән алыштырырга мөмкин. Квадрат тамырларның икенче үзлеген дә шулай кулланып була. Боларны исәпкә алып чишәбез.

а) $\sqrt{24} \cdot \sqrt{6} = \sqrt{24 \cdot 6} = \sqrt{144} = 12$;

б) $\sqrt{24} : \sqrt{6} = \sqrt{\dfrac{24}{6}} = \sqrt{4} = 2.$ ■

Параграфны төгәлләп, тагын бер шактый ук гади, әмма шул ук вакытта шактый ук әһәмиятле үзлекне билгеләп үтәрбез (аны исбатлагыз!):

әгәр $a \geqslant 0$ һәм n — натураль сан булса,

$$\sqrt{a^{2n}} = a^n.$$

Мәсәлән,

$$\sqrt{a^6} = a^3, \quad \sqrt{a^{10}} = a^5 \text{ h.б.}$$

5 нче мисал. Саннарның квадратлары таблицасын һәм, микрокалькулятор кулланмыйча, $\sqrt{7056}$ ны исәпләргә.

Чишү. Тамырасты санын гади тапкырлаучыларга таркатабыз:

7056	2
3528	2
1764	2
882	2
441	3
147	3
49	7
7	7
1	

Димәк, $7056 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 7^2$. Ул вакытта

$$\sqrt{7056} = \sqrt{2^4 \cdot 3^2 \cdot 7^2} = \sqrt{2^4} \cdot \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{7^2} = 2^2 \cdot 3 \cdot 7 = 84.$$

Җавап: $\sqrt{7056} = 84$.

Искәрмә 6. Бу мисалны § 10 тагы охшаш мисалны чишкән кебек тә чишеп булыр иде. Җавапта 80 нән бераз зуррак сан чыгуын чамаларга була, чөнки $80^2 < 7056 < 90^2$. Бу «койрыкны», ягъни эзләнелгән санның икенче цифрын табыйк. Хәзергә без, әгәр бу саннан квадрат тамыр алына икән, җавапта 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88 яки 89 табыласын беләбез. Квадратка күтәргәндә бары

84 һәм 86 саннары гына 7056 кебек 6 цифрына бетүче дүртурынлы санны биргәнлектән, бу саннарны гына тикшерәбез. 842 = 7056 — безгә кирәкле сан. Димәк, $\sqrt{7056} = 84$.

§15. КВАДРАТ ТАМЫР ГАМӘЛЕ КЕРГӘН АҢЛАТМАЛАРНЫ РӘВЕШҮЗГӘРТҮ

Хәзергә кадәр без бары рациональ аңлатмаларны гына рәвешүзгәрттек, моның өчен күпбуыннар һәм алгебраик вакланмалар белән гамәлләр эшләү кагыйдәләре, кыскача тапкырлау формаларын һ.б. кулландык. Бу бүлектә без яңа операция — квадрат тамыр алу операциясен керттек һәм

$$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a;$$

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b};$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}};$$

$$\sqrt{a^{2n}} = a^n,$$

икәнен билгеләдек, исегезгә төшерәбез, a, b — тискәре булмаган саннар.

Бу формулалардан файдаланып, квадрат тамыр алу операциясе кергән аңлатмаларны төрлечә рәвешүзгәртергә мөмкин. Моның өчен берничә мисал карап үтәрбез һәм һәр мисалда <u>үзгәрешлеләр бары тик тискәре булмаган кыйммәтләр генә ала</u> дип исәпләрбез.

1 нче мисал. Аңлатманы гадиләштерергә:

а) $\sqrt{a^2b^4}$; б) $\sqrt{\dfrac{16a^4}{9b^6}}$.

Чишү. а) $\sqrt{a^2b^4} = \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{b^4} = ab^2$;

б) $\sqrt{\dfrac{16a^4}{9b^6}} = \dfrac{\sqrt{16a^4}}{\sqrt{9b^6}} = \dfrac{4a^2}{3b^3}$.

2 нче мисал. Тапкырлаучыны квадрат тамыр тамгасы астыннан чыгарырга: а) $\sqrt{81a}$; б) $\sqrt{32a^2}$; в) $\sqrt{9a^7b^5}$.

Чишү. а) $\sqrt{81a} = \sqrt{81} \cdot \sqrt{a} = 9\sqrt{a}$;

б) $\sqrt{32a^2} = \sqrt{16 \cdot a^2 \cdot 2} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{2} = 4a\sqrt{2}$;

в) $\sqrt{9a^7b^5} = \sqrt{9 \cdot a^6 \cdot a \cdot b^4 \cdot b} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{a^6} \cdot \sqrt{a} \cdot \sqrt{b^4} \cdot \sqrt{b} =$

$= 3a^3b^2\sqrt{ab}$.

3 нче мисал. Тапкырлаучыны квадрат тамыр тамгасы астына кертергә:

а) $2\sqrt{2}$; б) $\dfrac{3a\sqrt{b}}{\sqrt{3a}}$.

Чишү. а) $2\sqrt{2} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{4 \cdot 2} = \sqrt{8}$;

б) $\dfrac{3a\sqrt{b}}{\sqrt{3a}} = \dfrac{\sqrt{9a^2} \cdot \sqrt{b}}{\sqrt{3a}} = \sqrt{\dfrac{9a^2 \cdot b}{3a}} = \sqrt{3ab}$.

4 нче мисал. Гамәлләрне эшләргә:

а) $\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)$; б) $\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^2$.

Чишү. а) $\sqrt{a} = x$, $\sqrt{b} = y$ булса, ул чагында

$$\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right) = (x + y)(x - y) = x^2 - y^2.$$

Әмма $x^2 = a, y^2 = b$, димәк, $\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right) = a - b$.

Ә бит яңа үзгәрешлеләр x һәм y ны кертеп тормаска да була иде, чишелеш тә кыскарак булыр иде:

$$\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right) = \left(\sqrt{a}\right)^2 - \left(\sqrt{b}\right)^2 = a - b.$$

б) $\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^2 = \left(\sqrt{a}\right)^2 + 2\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} + \left(\sqrt{b}\right)^2 = a + 2\sqrt{ab} + b$.

5 нче мисал. Тапкырлаучыларга таркатырга:

а) $4a - 4\sqrt{ab} + b$; б) $x\sqrt{x} + 1$.

Чишү.

а) $4a - 4\sqrt{ab} + b = \left(2\sqrt{a}\right)^2 - 2 \cdot 2\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} + \left(\sqrt{b}\right)^2$.

Моның $2\sqrt{a}$ һәм $\sqrt{b}$ аңлатмалары аермасының квадраты икәнен искәртик. Димәк, $4a - 4\sqrt{ab} + b = \left(2\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2$.

б) $x\sqrt{x} + 1 = \left(\sqrt{x}\right)^2 \cdot \sqrt{x} + 1 = \left(\sqrt{x}\right)^3 + 1^3$.

Кублар суммасын тапкырлаучыларга таркату формуласын гына искә төшерәсе калды:

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2).$$

Биредә a урынында — $\sqrt{x}$, ә b урынында — 1 саны. Табабыз:

$$\left(\sqrt{x}\right)^3 + 1^3 = \left(\sqrt{x} + 1\right)\left(\left(\sqrt{x}\right)^2 - \sqrt{x} \cdot 1 + 1^2\right) = \left(\sqrt{x} + 1\right)\left(x - \sqrt{x} + 1\right).$$ ◘

6 нчы мисал. Аңлатманы гадиләштерергә:

$$\frac{a\sqrt{a} + 3\sqrt{3}}{\left(\sqrt{a} - \sqrt{3}\right)^2 + \sqrt{3a}} \cdot \left(\sqrt{a} - \sqrt{3}\right).$$

Чишү.

1) $a\sqrt{a} + 3\sqrt{3} = \left(\sqrt{a}\right)^3 + \left(\sqrt{3}\right)^3 =$

$= \left(\sqrt{a} + \sqrt{3}\right)\left(\left(\sqrt{a}\right)^2 - \sqrt{a} \cdot \sqrt{3} + \left(\sqrt{3}\right)^2\right) = \left(\sqrt{a} + \sqrt{3}\right)\left(a - \sqrt{3a} + 3\right);$

2) $\left(\sqrt{a} - \sqrt{3}\right)^2 + \sqrt{3a} = \left(\left(\sqrt{a}\right)^2 - 2\sqrt{a} \cdot \sqrt{3} + \left(\sqrt{3}\right)^2\right) + \left(\sqrt{3a}\right) =$

$= a - 2\sqrt{3a} + 3 + \sqrt{3a} = a - \sqrt{3a} + 3$ (без охшаш буыннарны берләштердек: $-2\sqrt{3a} + \sqrt{3a} = -\sqrt{3a}$);

3) $\dfrac{\left(\sqrt{a} + \sqrt{3}\right)\left(a - \sqrt{3a} + 3\right)}{a - \sqrt{3a} + 3} = \sqrt{a} + \sqrt{3}$ (вакланманы $\sqrt{3a} + 3$ кә, ягъни санаучы һәм ваклаучының уртак тапкырлаучысына кыскарттык);

4) $\left(\sqrt{a} + \sqrt{3}\right)\left(\sqrt{a} - \sqrt{3}\right) = \left(\sqrt{a}\right)^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2 = a - 3.$ ◘

7 нче мисал. Гамәлләрне эшләргә: $\dfrac{a}{\sqrt{2b}} + \dfrac{a^2}{\sqrt{3b^3}}$.

Чишү. Рациональ вакланмалардагы кебек, уртак ваклаучы — бирелгән ваклаучыларның һәрберсенә бүленә торган

иррациональ аңлатма табарга кирәк. Шундый аңлатма ролен, мәсәлән, $\sqrt{6b^3}$ үти. Карагыз:

$$\sqrt{6b^3} = \sqrt{3b^2 \cdot 2b} = b\sqrt{3} \cdot \sqrt{2b}; \quad \sqrt{6b^3} = \sqrt{2 \cdot 3b^3} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{3b^3}.$$

Димәк, беренче вакланма өчен өстәмә тапкырлаучы булып $b\sqrt{3}$, икенчесе өчен $\sqrt{2}$ тора һәм: $\frac{a}{\sqrt{2b}} + \frac{a^2}{\sqrt{3b^3}} = \frac{ab\sqrt{3} + a^2\sqrt{2}}{\sqrt{6b^3}}$. ▣

8 нче мисал. Бирелгән алгебраик аңлатманы вакланманың ваклаучысында квадрат тамыр тамгасы булмаслык итеп үзгәртегез: а) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; б) $\frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$.

Чишү. Ике очракта да вакланманың санаучысын да, ваклаучысын да нульгә тигез булмаган бер үк санга яки аңлатмага тапкырлаудан вакланманың кыйммәтен үзгәртмәвен исәпкә алып эшләрбез.

а) Вакланманың санаучысын да, ваклаучысын да $\sqrt{2}$ гә тапкырлыйбыз:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

б) Вакланманың санаучысын да, ваклаучысын да $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ гә тапкырлыйбыз:

$$\frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = \frac{1 \cdot \left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right)} = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\left(\sqrt{3}\right)^2 - \left(\sqrt{2}\right)^2} =$$

$$= \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{3 - 2} = \sqrt{3} + \sqrt{2}.$$ ▣

ваклаучыдагы иррациональлектән котылу

Әгәр алгебраик вакланманың ваклаучысында квадрат тамыр тамгасы булса, гадәттә, *ваклаучыда иррациональлек бар*, диләр. Аңлатманы ваклаучыда квадрат тамыр тамгасы калмаслык итеп үзгәртүне *ваклаучыдагы иррациональлектән котылу* дип тә йөртәләр. Без 8 нче мисалда ваклаучыдагы иррациональлектән котылуның ике төп алымын карап үттек:

әгәр ваклаучы $\sqrt{a}$ рәвешендә булса, санаучыны да, ваклаучыны да $\sqrt{a}$ га тапкырларга кирәк;

әгәр ваклаучы $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ яки $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ рәвешендә булса, ваклаучыны да, санаучыны да тиңдәшле рәвештә $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ яки $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ га тапкырларга кирәк (*иярешле аңлатма*).

Ни өчен ваклаучыдагы иррациональлектән котылырга кирәк? Бик күп очракларда ул алгебраик аңлатмалардагы бердәй рәвешүзгәртүләрне җиңеләйтә. Моңа хәзер үзегез дә ышанырсыз.

9 нчы мисал. Аңлатманы гадиләштерергә:

$$\frac{7}{\sqrt{7}}-\frac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}+\frac{4}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}.$$

Чишү.

1) $\frac{7}{\sqrt{7}}=\frac{7\sqrt{7}}{\sqrt{7}\cdot\sqrt{7}}=\frac{7\sqrt{7}}{7}=\sqrt{7};$

2) $\frac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}=\frac{2\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)}{\left(\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)}=\frac{2\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)}{\left(\sqrt{7}\right)^2-\left(\sqrt{5}\right)^2}=$

$=\frac{2\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)}{7-5}=\frac{2\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)}{2}=\sqrt{7}+\sqrt{5};$

3) $\frac{4}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}=\frac{4\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)}=\frac{4\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{5}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}=$

$=\frac{4\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)}{5-3}=\frac{4\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)}{2}=2\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right);$

4) $\sqrt{7}-\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)+2\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)=\sqrt{7}-\sqrt{7}-\sqrt{5}+2\sqrt{5}-$

$-2\sqrt{3}=\sqrt{5}-2\sqrt{3}.$

Җавап: $\sqrt{5}-2\sqrt{3}.$

§16. РЕАЛЬ САННЫҢ МОДУЛЕ

1. Реаль санның модуле һәм аның үзлекләре

Кечерәк сыйныфларда сез инде санның модуле (яки абсолют зурлыгы) төшенчәсе белән очраштыгыз һәм $|a|$ язылышын кулланган идегез. Сез, мәсәлән, $|5| = 5$, $|-3| = 3$ икәнен беләсез. Дөрес, элек сүз бары рациональ саннар турында гына барды. Хәзер инде теләсә нинди реаль санның модуле төшенчәсен кертергә кирәк.

Билгеләмә. ***Тискәре булмаган реаль x санының модуле*** дип санның үзен: $|x| = x$, тискәре реаль санының модуле дип капма-каршы санны: $|x| = -x$ атыйлар.

Кыскача болай язалар:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \text{ булганда;} \\ -x, & x < 0 \text{ булганда.} \end{cases} \qquad (1)$$

Мәсәлән,

$$|5| = 5; \quad |-5| = -(-5) = 5; \quad |-3,7| = -(-3,7) = 3,7;$$

$$\left|\sqrt{5} - 2\right| = \sqrt{5} - 2 \ \left(\text{чөнки } \sqrt{5} - 2 > 0\right);$$

$$\left|\sqrt{5} - 3\right| = -\left(\sqrt{5} - 3\right) = 3 - \sqrt{5} \ \left(\text{чөнки } \sqrt{5} - 3 < 0\right).$$

Практикада модульләрнең төрле үзлекләрен кулланалар, мәсәлән:

1. $|a| \geq 0$.
2. $|ab| = |a| \cdot |b|$.
3. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$.
4. $|a|^2 = a^2$.
5. $|a| = |-a|$.

2. Реаль сан модуленең геометрик мәгънәсе

Реаль саннар күплеге R га һәм аның геометрик моделе булган саннар турысына әйләнеп кайтыйк. Турыда ике нокта: a һәм b (ике реаль сан a һәм b) билгелик; a һәм b арасындагы ераклыкны $\rho(a;\ b)$ дип билгелибез (ρ — латин алфавитындагы «ро» хәрефе). Бу ераклык, әгәр $b > a$ булса, $b - a$ га (рәс. 20, *а*), әгәр $a > b$ булса, $a - b$ га (рәс. 20, *б*), һәм $a = b$ булса, нульгә тигез була.

Рәс. 20

Барлык өч очракны бер формула күрсәтә:

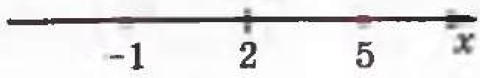
$$\rho(a;\ b) = |a - b|.$$

1 нче мисал. Тигезләмәне чишәргә:

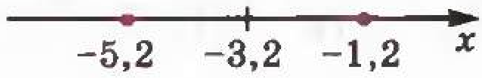
а) $|x - 2| = 3$; б) $|x + 3{,}2| = 2$; в) $|x| = 2{,}7$; г) $|x - \sqrt{2}| = 0$.

Чишү. а) Аналитик модель $|x - 2| = 3$ не геометрия теленә күчерик: безгә координаталар турысында $\rho(x;\ 2) = 3$ шартын канәгатьләндерә торган, ягъни 2 ноктасыннан 3 ераклыгындагы x нокталарын табарга кирәк. Шунлыктан тигезләмәнең ике тамыры бар: -1 һәм 5 (рәс. 21).

б) $|x + 3{,}2| = 2$ тигезләмәсен $|x - (-3{,}2)| = 2$ рәвешендә язабыз һәм $\rho(x;\ -3{,}2) = 2$ була. Координаталар турысында $-3{,}2$ ноктасыннан 2 гә тигез булган ераклыкта ике нокта бар. Болар $-5{,}2$ һәм $-1{,}2$ нокталары (рәс. 22). Димәк, тигезләмәнең ике тамыры бар: $-5{,}2$ һәм $-1{,}2$.



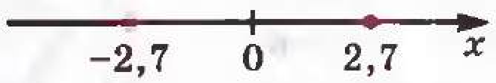
Рәс. 21



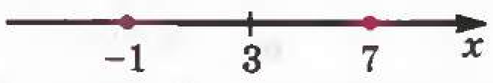
Рәс. 22

в) $|x| = 2{,}7$ тигезләмәсен $|x - 0| = 2{,}7$ рәвешендә язабыз, башкача язсак, $\rho(x;\ 0) = 2{,}7$. Координаталар турысында 0 ноктасыннан 2,7 ераклыгында ике нокта бар. Болар $-2{,}7$ һәм 2,7 нокталары (рәс. 23). Шулай итеп, тигезләмәнең ике тамыры бар: $-2{,}7$ һәм 2,7.

г) $|x - \sqrt{2}| = 0$ тигезләмәсен геометрик сурәтләүсез дә чишеп була, чөнки $|a| = 0$ булса, $a = 0$ була. Шунлыктан $x - \sqrt{2} = 0$, ягъни $x = \sqrt{2}$.



Рәс. 23



Рәс. 24

2 нче мисал. Тигезләмәне чишәргә:

а) $|2x - 6| = 8$; б) $|5 - 3x| = 6$; в) $|4x + 1| = -2$.

Чишү. а) Табабыз:

$$|2x - 6| = |2(x - 3)| = |2| \cdot |x - 3| = 2|x - 3|.$$

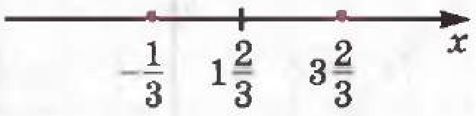
Димәк, бирелгән тигезләмәне $2|x - 3| = 8$ рәвешенә китерергә мөмкин, аннан $|x - 3| = 4$ не алабыз.

$|x - 3| = 4$ аналитик моделен геометрия теленә күчерәбез: безгә координаталар турысында $\rho(x;\ 3) = 4$ шартын канәгатьләндерә торган, ягъни 3 ноктасыннан 4 ераклыгындагы x нокталарын табарга кирәк. Болар -1 һәм 7 нокталары (рәс. 24). Димәк, тигезләмәнең ике тамыры бар: -1 һәм 7.

б) Табабыз:

$$|5 - 3x| = \left|-3\left(x - \frac{5}{3}\right)\right| = |-3| \cdot \left|x - \frac{5}{3}\right| = 3\left|x - \frac{5}{3}\right|.$$

Шуңа күрә бирелгән тигезләмәне $3\left|x - \frac{5}{3}\right| = 6$ рәвешенә китерергә мөмкин, моннан $\left|x - \frac{5}{3}\right| = 2$.



Рәс. 25

$\left|x - \frac{5}{3}\right| = 2$ аналитик моделен геометрия теленә күчерәбез. Координаталар турысында $\rho\left(x; \frac{5}{3}\right) = 2$ шартын канәгатьләндерә торган x нокталарын табарга кирәк. Димәк, алар $\frac{5}{3}$ ноктасыннан, ягъни $1\frac{2}{3}$ ноктасыннан 2 ераклыгында.

Болар $-\frac{1}{3}$ һәм $3\frac{2}{3}$ нокталары (рәс. 25). Шулай булгач, тигезләмәнең ике тамыры бар: $-\frac{1}{3}$ һәм $3\frac{2}{3}$.

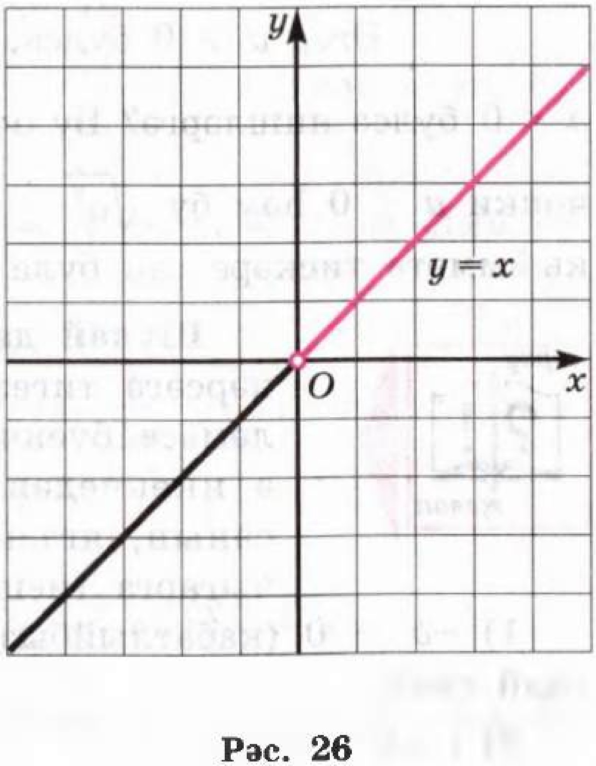
в) $|4x + 1| = -2$ тигезләмәсе өчен бернинди рәвешүзгәртүләр дә кирәкми. Аның, сул ягында тискәре булмаган сан, ә уң ягында тискәре сан булганлыктан, тамырлары була алмый.

3. $y = |x|$ функциясе

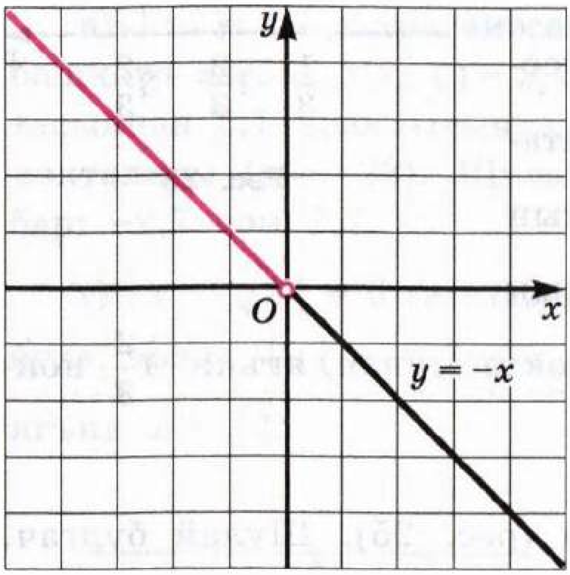
Теләсә нинди реаль x саны өчен $|x|$ ны табарга мөмкин, ягъни $y = |x|$ функциясе турында сөйләшергә була. 1 нче пункттагы (1) формуласыннан файдаланып, $y = |x|$ урынына язабыз:

$$y = \begin{cases} x, & x \geqslant 0 \text{ булганда;} \\ -x, & x < 0 \text{ булганда.} \end{cases}$$

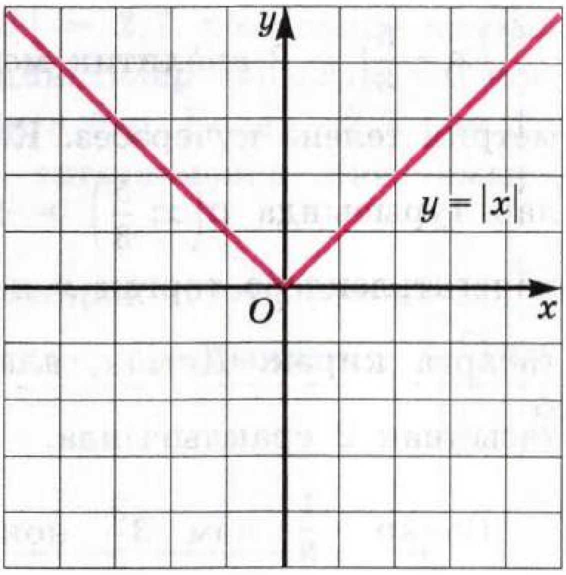
Шундый ук башка очраклардагы кебек, графикны «кисәкләргә» бүлеп төзибез. Башта $y = x$ турысын төзеп, аның $[0; +\infty)$ турысындагы өлешен алабыз (рәс. 26). Аннан $y = -x$ турысын



Рәс. 26



Рәс. 27



Рәс. 28

төзибез һәм аның $(-\infty; 0)$ ачык нурындагы өлешен билгелибез (рәс. 27). Ниһаять, ике «кисәкне» дә бер үк координаталар системасында сурәтләп, $y = |x|$ функциясенең графигын табабыз (рәс. 28).

4. $\sqrt{a^2} = |a|$ бердәйлеге

Әгәр $a \geqslant 0$ булса, $\sqrt{a^2} = a$ икәнен без беләбез. Әгәр $a < 0$ булса нишләргә? Бу очракта $\sqrt{a^2} = a$ дип язарга ярамый, чөнки $a < 0$ һәм бу $\sqrt{a^2} < 0$ дигән сүз, ә квадрат тамырның кыйммәте тискәре сан була алмаганлыктан, бу дөрес түгел.

Шулай да $a < 0$ булганда, $\sqrt{a^2}$ аңлатмасы нәрсәгә тигез соң? Квадрат тамырның билгеләмәсе буенча, җавапта, беренчедән, уңай сан, ә икенчедән, квадратка күтәргәч тамырасты санын, ягъни a^2 ны бирә торган сан килеп чыгарга тиеш. Мондый сан $-a$ була. Карагыз:

1) $-a > 0$ (кабатлыйбыз, a — тискәре сан, димәк, $-a$ — уңай сан);

2) $(-a)^2 = a^2$.

Шулай итеп,

$$\sqrt{a^2} = \begin{cases} a, & a \geqslant 0 \text{ булганда;} \\ -a, & a < 0 \text{ булганда.} \end{cases}$$

Тигезләмәнең уң ягындагы конструкция сезгә нәрсәне дә булса хәтерләтмиме? Ә бит a санының модуле нәкъ шулай билгеләнә иде:

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geqslant 0 \text{ булганда;} \\ -a, & a < 0 \text{ булганда.} \end{cases}$$

Димәк, $\sqrt{a^2}$ һәм $|a|$ — икесе дә бер үк икән. Шуның белән без бик әһәмиятле берлекне исбатладык:

$$\sqrt{a^2} = |a|.$$

Теләсә кайсы санлы яки алгебраик аңлатма a ролен үти.

3 нче мисал. Әгәр а) $a - 1 > 0$; б) $a - 1 < 0$ булса, $\sqrt{(a-1)^2}$ аңлатмасын гадиләштерергә.

Чишү. Түбәндәге бердәйлекне без әле генә исбатлаган идек:

$$\sqrt{(a-1)^2} = |a - 1|.$$

а) Әгәр $a - 1 > 0$ булса, $|a - 1| = a - 1$. Шулай итеп, бу очракта: $\sqrt{(a-1)^2} = a - 1$.

б) Әгәр $a - 1 < 0$ булса, $|a - 1| = -(a - 1) = 1 - a$. Димәк, бу очракта: $\sqrt{(a-1)^2} = 1 - a$.

4 нче мисал. Әгәр $a < 0$ булса, $\frac{1}{2a} \cdot \sqrt{32a^2}$ аңлатмасын гадиләштерегез.

Чишү.

$$\frac{1}{2a} \cdot \sqrt{32a^2} = \frac{\sqrt{32} \cdot \sqrt{a^2}}{2a} = \frac{4\sqrt{2} \cdot |a|}{2a} = \frac{2\sqrt{2} \cdot |a|}{a}.$$

Шарт буенча $a < 0$ булганлыктан, $|a| = -a$. Нәтиҗәдә табабыз:

$$\frac{2\sqrt{2}\cdot|a|}{a}=\frac{2\sqrt{2}\cdot(-a)}{a}=-2\sqrt{2}.$$

Җавап: $-2\sqrt{2}$.

5 нче мисал. Исәпләргә: $\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}+\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}$.

Чишү.

$$\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}=|\sqrt{3}-2|;\quad \sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}=|\sqrt{3}-1|.$$

Гадәттә, «модуль тамгаларын ачарга» кирәк, диләр. Хәзер шулай эшлибез. $1<\sqrt{3}<2$ тигезләмәсеннән файдаланабыз. Димәк, $\sqrt{3}-2<0$, ә $\sqrt{3}-1>0$. Тик ул чагында $|\sqrt{3}-2|=$ $=-(\sqrt{3}-2)=2-\sqrt{3}$, ә $|\sqrt{3}-1|=\sqrt{3}-1$. Нәтиҗәдә табабыз:

$$\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}+\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}=|\sqrt{3}-2|+|\sqrt{3}-1|=$$

$$=2-\sqrt{3}+\sqrt{3}-1=1.$$

Җавап: 1.

ТӨП НӘТИҖӘЛӘР

Бу бүлектә сез математика теленең яңа атамалары белән таныштыгыз:

чиксез периодик унарлы вакланма (рациональ сан);
периодик булмаган чиксез унарлы вакланма (иррациональ сан);
саннар турысы;
тискәре булмаган саннан квадрат тамыр;
тискәре булмаган саннан куб тамыр;
тамырасты аңлатмасы;
квадрат (куб) тамыр алу;
вакланманы иррациональлектән котылдыру.

Без берничә яңа <u>тамгаланыш</u> (математика теленең яңа символларын) керттек:

N — натураль саннар күплеге;
Z — бөтен саннар күплеге;
Q — рациональ саннар күплеге;
R — реаль саннар күплеге;
$x \in X$ — x элементы X күплегенә керә;
$A \subset B$ — A күплеге B күплегенең бер өлеше (аскүплеге) булып тора.

Без яңа <u>билгеләнеш</u> $\sqrt{a}$ ны керттек (аның $a \geqslant 0$) булганда гына мәгънәсе бар). $\sqrt{a} = b$ язылышы $b \geqslant 0$ һәм $b^2 = a$ икәнлеген аңлата.

Без яңа <u>математик модельләр</u> — $y = \sqrt{x}$ һәм $y = |x|$ функцияләрен (аларның үзлекләрен һәм графикларын) өйрәндек.

Функцияләрнең моңарчы билгеле булган үзлекләренә <u>өч яңа үзлек</u> өстәдек:
функциянең өскә кабарынкылыгы;
функциянең аска кабарынкылыгы;
функциянең кыйммәтләре күплеге;
Без теләсә нинди тискәре булмаган a, b саннары өчен дә дөрес булган яңа <u>бердәйлекләрне</u> өйрәндек:

$$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a; \qquad \sqrt{ab} = \sqrt{a}\cdot\sqrt{b}; \qquad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}};$$

$$\sqrt{a^{2n}} = a^n \ (n \text{ — натураль сан}).$$

Без a ның теләсә нинди кыйммәте өчен $\sqrt{a^2} = |a|$ бердәйлегенең дөрес икәнлеген исбатладык.

3 БҮЛЕК. КВАДРАТИК ФУНКЦИЯ. $y = \frac{k}{x}$ ФУНКЦИЯСЕ

§ 17. $y = kx^2$ функциясе, аның үзлекләре һәм графигы
§ 18. $y = \frac{k}{x}$ функциясе, аның үзлекләре һәм графигы
§ 19. Әгәр $y = f(x)$ функциясенең графигы билгеле булса, $y = f(x + l)$ функциясенең графигын ничек төзергә
§ 20. Әгәр $y = f(x)$ функциясенең графигы билгеле булса, $y = f(x) + m$ функциясенең графигын ничек төзергә
§ 21. Әгәр $y = f(x)$ функциясенең графигы билгеле булса, $y = f(x + l) + m$ функциясенең графигын ничек төзергә
§ 22. $y = ax^2 + bx + c$ функциясе, аның үзлекләре һәм графигы
§ 23. Квадрат тигезләмәләрне график юл белән чишү

§17. $y = kx^2$ ФУНКЦИЯСЕ, АНЫҢ ҮЗЛЕКЛӘРЕ ҺӘМ ГРАФИГЫ

Яңа функцияләр белән танышуны дәвам итәбез. Бу параграфта сүз $y = kx^2$ функциясе турында барыр (биредә k — нульгә тигез булмаган реаль сан).

Чынлыкта $y = kx^2$ функциясе ике очракта сезгә инде таныш. Карыйк әле, әгәр $k = 1$ булса, $y = x^2$, бу функцияне сез инде 7 нче сыйныфта өйрәндегез һәм аның графигының парабола икәнен беләсез. Әгәр $k = -1$ булса, $y = -x^2$, аның графигы да парабола була. Хәзер k коэффициентының башка кыйммәтләрендә нәрсә булганын тикшерик.

Ике функция: $y = 2x^2$ һәм $y = 0{,}5x^2$ ны тикшерик. Беренче $y = 2x^2$ функциясе өчен кыйммәтләр таблицасын төзибез:

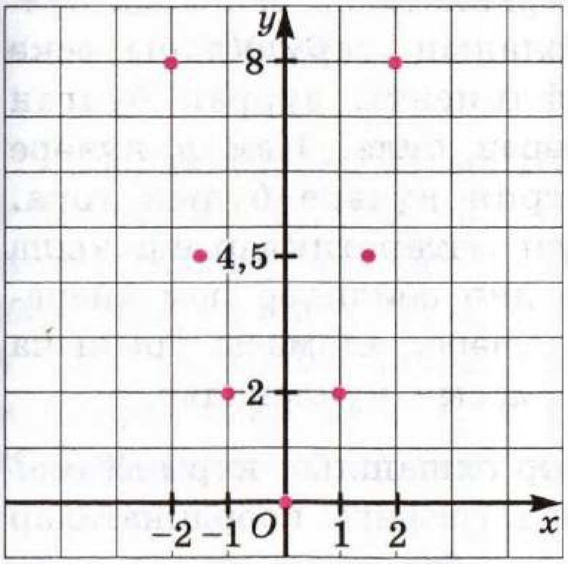
x	0	1	−1	2	−2	1,5	−1,5
y	0	2	2	8	8	4,5	4,5

Координаталар яссылыгында (0; 0), (1; 2), (−1; 2), (2; 8), (−2; 8), (1,5; 4,5), (−1,5; 4,5) нокталарын төзик (рәс. 29); алар ниндидер сызыкны билгелиләр, һәм без бу сызыкны үткәрербез (рәс. 30).

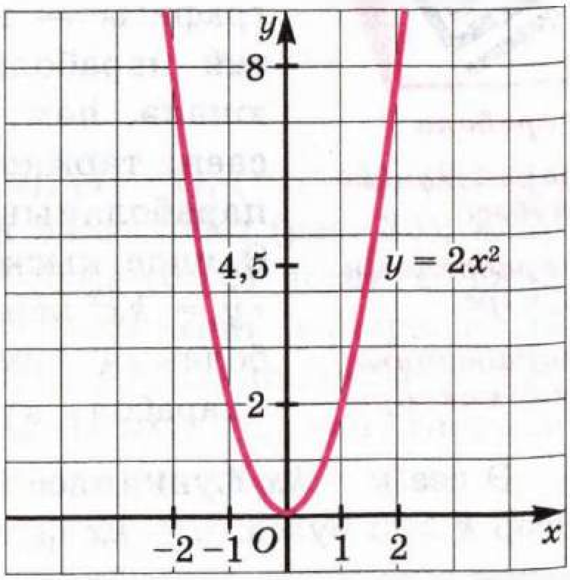
Икенче $y = 0,5x^2$ функциясе өчен кыйммәтләр таблицасын төзибез:

x	0	1	−1	2	−2	3	−3
y	0	0,5	0,5	2	2	4,5	4,5

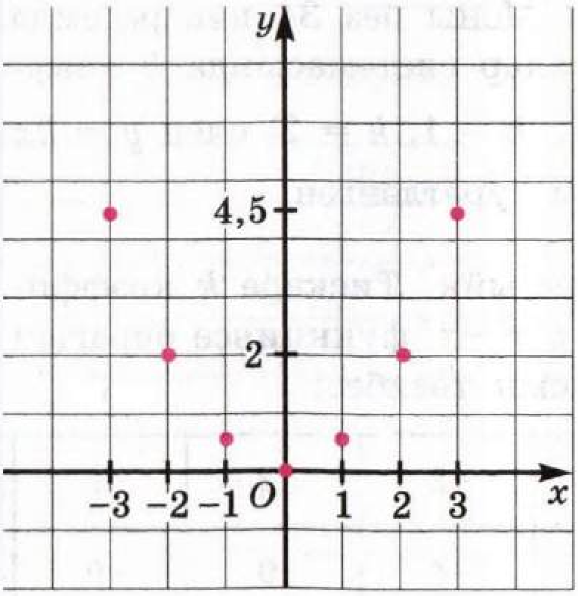
Координаталар яссылыгында (0; 0), (1; 0,5), (−1; 0,5), (2; 2), (−2; 2), (3; 4,5), (−3; 4,5) нокталарын төзибез (рәс. 31); һәм бу нокталар аша сызык үткәрәбез (рәс. 32).



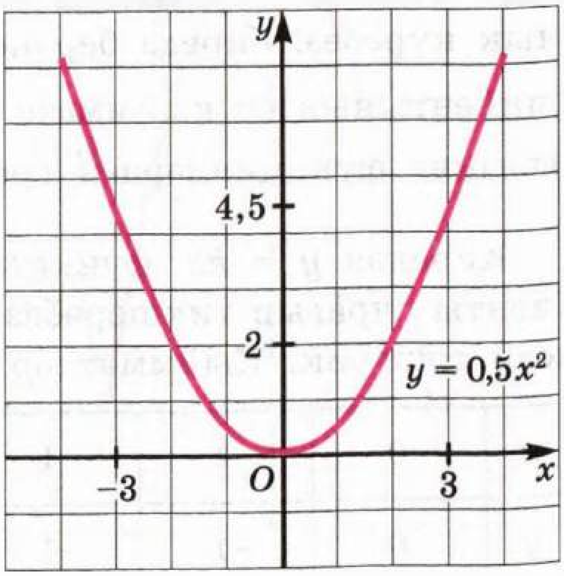
Рәс. 29



Рәс. 30



Рәс. 31



Рәс. 32

41 нче биттәге 1 нче рәсемне 30 һәм 32 нче рәсемнәр белән чагыштырыгыз. Әлеге сызыклар охшаш бит, әйеме? Аларның һәркайсын **парабола** дип атыйлар; ә инде (0; 0) ноктасын **параболаның түбәсе,** y күчәрен **параболаның симметрия күчәре** дип йөртәләр. Парабола тармакларының өскә «омтылу тизлеге» яки, әгәр шулай әйтергә яраса, параболаның «текәлек дәрәҗәсе» k коэффициентына бәйләнгән. Барлык өч парабола бер үк координаталар яссылыгында күрсәтелгән 33 нче рәсемдә бу аеруча яхшы күренә.

сүзлекчә

парабола

параболаның түбәсе

параболаның күчәре

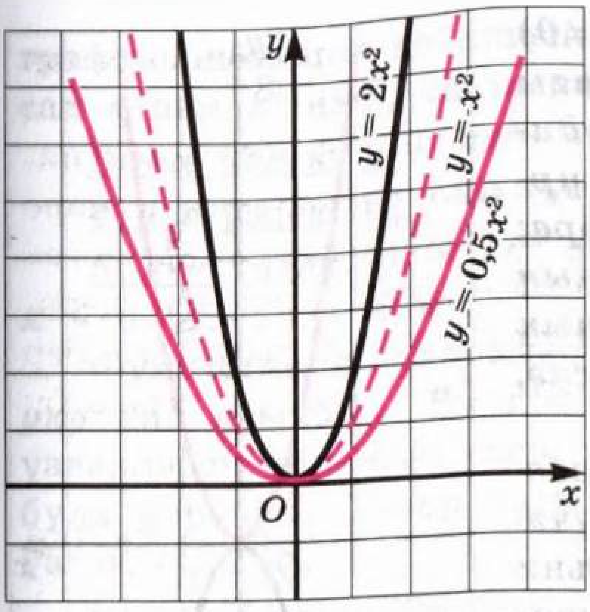
параболаның тармаклары

$y = kx^2$ рәвешендәге теләсә кайсы башка функция дә үзен шулай тота, биредә $k > 0$. Аның графигы — түбәсе координаталар башында булган парабола, параболаның тармаклары өскә юнәлә, һәм, k коэффициенты зуррак булган саен, тармаклар текәрәк була. Һәм y күчәре параболаның симметрия күчәре булып тора. Ә инде кыскалык өчен математиклар еш кына «$y = kx^2$ параболасы» дип сөйлиләр һәм «параболаның симметрия күчәре» атамасы урынына «парабола күчәре» атамасын кулланалар.

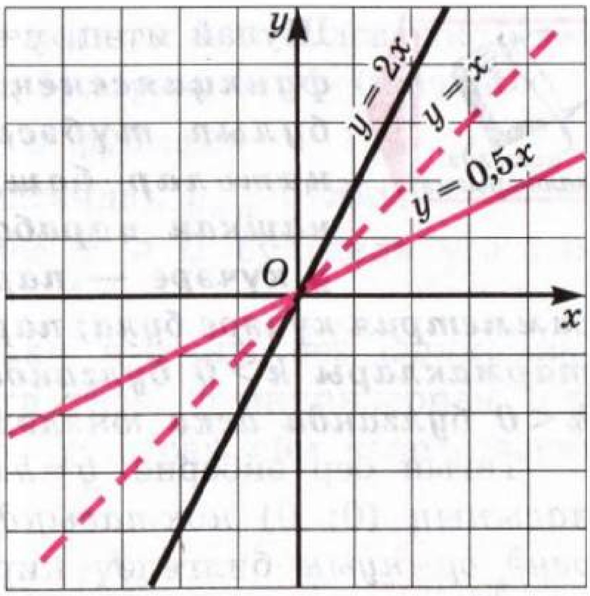
Ә сез $y = kx$ функциясе белән берәр охшашлык күрмисезме? Әгәр $k > 0$ булса, $y = kx$ функциясенең графигы координаталар башы аша үтүче туры була (хәтерлисезме, без кыска гына $y = kx$ турысы дип сөйләдек), һәм монда да турының текәлеге k коэффициентының зурлыгына бәйле иде. Моны без 34 нче рәсемдә ачык күрәбез: биредә бер координаталар системасында k коэффициентының өч кыйммәте k ($k = \frac{1}{2}$, $k = 1$, $k = 2$) өчен $y = kx$ сызыкча функцияләрнең графиклары сурәтләнгән.

Киредән $y = kx^2$ функциясенә кайтыйк. Тискәре k коэффициенты очрагын тикшерәбез. Башта $y = -x^2$ функциясе очрагын искә төшерик. Кыйммәтләр таблицасын төзибез:

x	0	1	−1	2	−2	3	−3
y	0	−1	−1	−4	−4	−9	−9

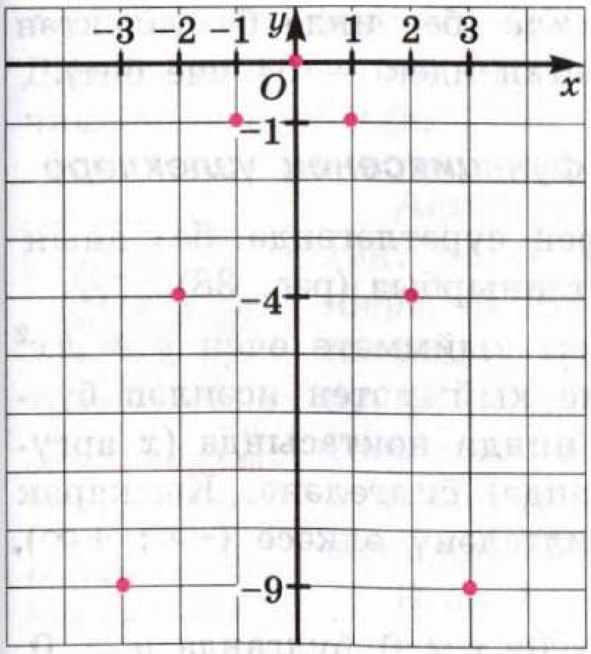


Рәс. 33

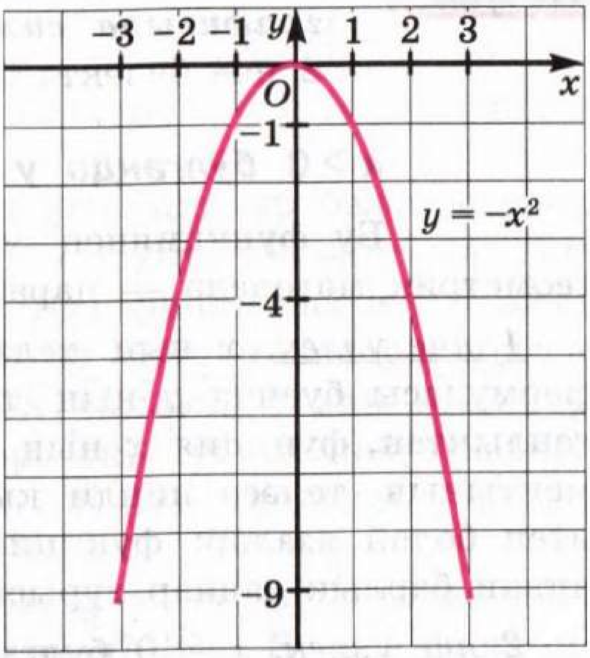


Рәс. 34

Координаталар яссылыгында (0; 0), (1; −1), (−1; −1), (2; −4), (−2; −4), (3; −9), (−3; −9) нокталарын билгелибез (рәс. 35); алар аша сызыклар үткәрәбез (рәс. 36). Түбәсе (0; 0) ноктасындагы парабола килеп чыкты, *y* күчәре — симметрия күчәре, әмма $k > 0$ булган очрактан үзгә буларак, бу параболаның тармаклары аска юнәлә. *k* коэффициентының башка тискәре кыйммәтләрендә дә шундый ук параболалар килеп чыга.

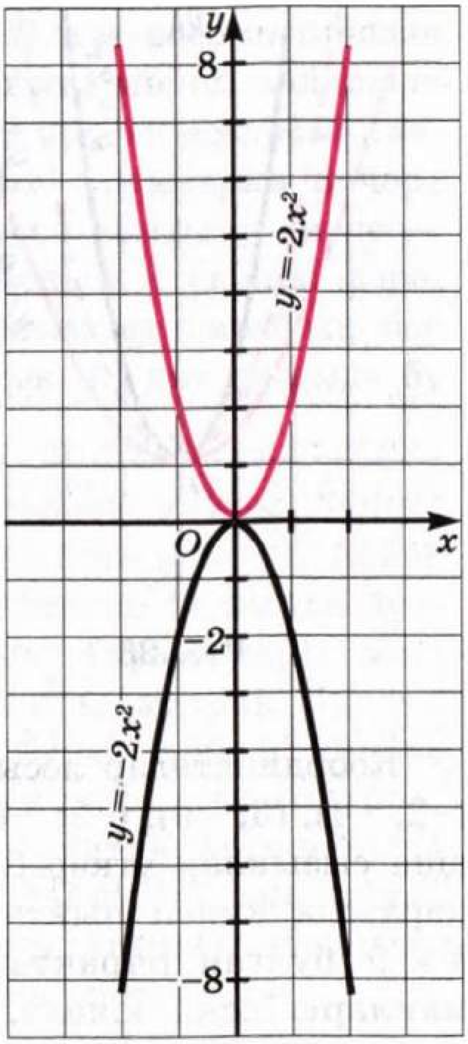


Рәс. 35



Рәс. 36

Шулай итеп, $y=kx^2 (k \neq 0)$ функциясенең графигы булып түбәсе координаталар башында урнашкан парабола тора; у күчәре — параболаның симметрия күчәре була; параболаның тармаклары $k>0$ булганда — өскә, $k<0$ булганда аска юнәләләр.



Рәс. 37

Тагын бер әйберне, $y=kx^2$ *параболасының* (0; 0) *ноктасында x күчәренә орынуын* билгеләү кирәк, ягъни параболаның бер тармагы x күчәренә сыенып диярлек үтеп, икенче тармагына салмак кына күчә.

Әгәр $y=2x^2$ һәм $y=-2x^2$ функцияләре графикларын бер үк координаталар яссылыгында төзесәк (рәс. 37), бу параболаларның x күчәренә карата симметрияле икәнен күрергә мөмкин.

Гомумән, $y=-f(x)$ функциясенең графигы абсциссалар күчәренә карата $y=f(x)$ функциясе графигына симметрияле (без инде бу үзлектән 2 нче бүлектә файдаланган идек — 64 нче бит).

$k>0$ булганда $y=kx^2$ функциясенең үзлекләре

Бу функциянең үзлекләрен сурәтләгәндә, без аның геометрик моделенә — параболага таянырбыз (рәс. 38).

1 нче үзлек. x ның теләсә кайсы кыйммәте өчен $y=kx^2$ формуласы буенча y ның тиңдәшле кыйммәтен исәпләп булганлыктан, функция x ның теләсә нинди ноктасында (x аргументының теләсә нинди кыйммәтендә) билгеләнә. Кыскарак итеп болай язалар: функциянең билгеләнү өлкәсе $(-\infty; +\infty)$, ягъни барлык саннар турысы.

2 нче үзлек. $x=0$ булганда $y=0$; $x \neq 0$ булганда $y>0$. Моны графиктан да ачык күрәбез (ул x күчәреннән өстә урнаша),

графиктан башка да нигезләргә мөмкин: $x \neq 0$ булса, ике уңай сан k һәм x^2 ның тапкырчыгышы буларак, $kx^2 > 0$ була.

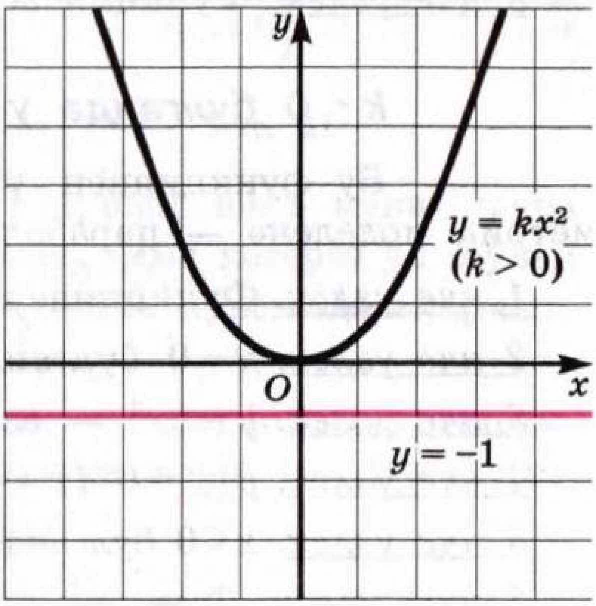
<u>*3 нче үзлек*</u>. $y = kx^2$ — өзлексез функция.

<u>*4 нче үзлек*</u>. $y_{\min} = 0$ ($x = 0$ булганда), $y_{\max}$ булмый.

<u>*5 нче үзлек*</u>. $y = kx^2$ функциясе $x \geqslant 0$ булганда үсә һәм $x \leqslant 0$ булганда кими.

Функциянең үзлекләрен санап чыгуны без *функцияне уку* дип атыйбыз. Бу процесс алга таба, функцияләрнең яңа үзлекләрен өйрәнгән саен, тагын да тулырак һәм кызыклырак була барачак. Хәзер тагын бер үзлек өстибез.

$y = f(x)$ функциясенең барлык кыйммәтләре дә билгеле бер саннан зуррак булса, аны *астан чикләнгән* дип атыйлар. Геометрик яктан карасак, функциянең графигы x күчәренә параллель булган ниндидер турыдан өстәрәк урнашкан дип әйтергә мөмкин.



Рәс. 38

Ә хәзер карагыз, $y = kx^2$ функциясенең графигы $y = -1$ (яки $y = -2$, бу мөһим түгел) турысыннан өстә ята (рәс. 38). Димәк, $y = kx^2$ ($k > 0$) — астан чикләнгән функция.

өстән чикләнгән функция

астан чикләнгән функция

Астан чикләнгән функцияләр белән беррәттән, өстән чикләнгән функцияләрне дә тикшерәләр. Әгәр $y = f(x)$ функциясенең барлык кыйммәтләре ниндидер саннан кечерәк булса, бу функцияне *өстән чикләнгән* дип атыйлар. Геометрик яктан карасак, функциянең графигы x күчәренә параллель булган ниндидер турыдан *астарак ята* дигән сүз.

Әгәр $k > 0$ булса, $y = kx^2$ функциясе өчен мондый нокта бар микән? Юк. Бу исә функция өстән чикләнмәгәнне аңлата.

Шулай итеп, без тагын бер үзлек таптык һәм аны алда санап үтелгән бишесенә өстәп куябыз.

6 нчы үзлек. $y = kx^2$ $(k > 0)$ функциясе астан чикләнгән, өстән чикләнмәгән.

2 нче бүлектә без функцияләрнең тагын ике үзлеген — кыйммәтләр күплеген һәм кабарынкылыгын өйрәнгән идек. Аларны тикшерелә торган функциянең җиденче һәм сигезенче үзлекләре сыйфатында билгелибез.

7 нче үзлек. $y = kx^2$ $(k > 0)$ функциясенең кыйммәтләре өлкәсе — $[0; +\infty)$ нуры.

8 нче үзлек. Функция аска кабарынкы.

$k < 0$ булганда $y = kx^2$ функциясенең үзлекләре

Бу функциянең үзлекләрен сурәтләгәндә, аның геометрик моделенә — параболага таянырбыз (рәс. 39).

1 нче үзлек. Функциянең билгеләнү өлкәсе — $(-\infty; +\infty)$.

2 нче үзлек. $x = 0$ булганда $y = 0$, $x \neq 0$ булганда $y < 0$.

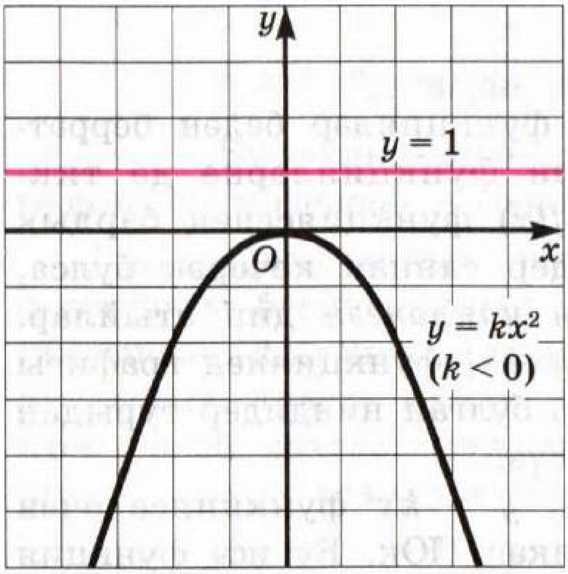
3 нче үзлек. $y = kx^2$ — өзлексез функция.

4 нче үзлек. $y_{max} = 0$ $(x = 0$ булганда), y_{min} булмый.

5 нче үзлек. $x \leqslant 0$ булганда функция үсә, $x \geqslant 0$ булганда кими.

6 нчы үзлек. Функция өстән чикләнгән, астан чикләнмәгән.

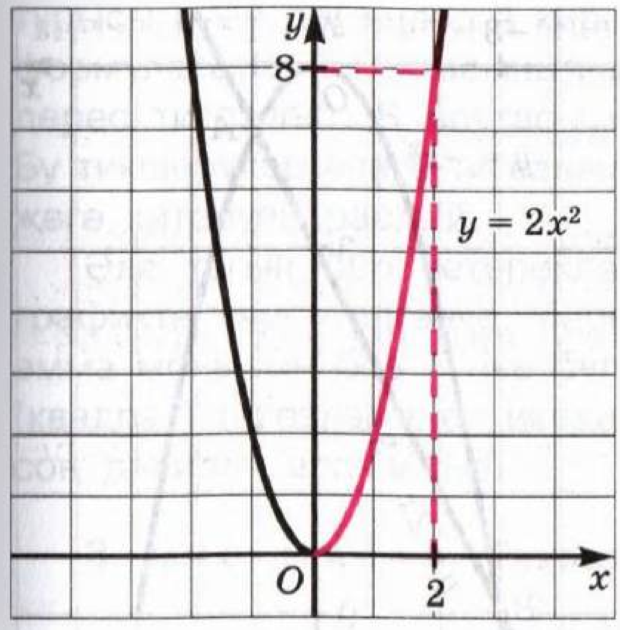
Соңгы үзлекне аңлатып китик, x күчәренә параллель булган (мәсәлән, $y = 1$ турысы, рәс. 39) туры бар, һәм парабола тулысынча аннан астарак урнаша; димәк, функция өстән чикләнгән. Ә икенче яктан, парабола тулысы белән бу турыдан өстә ятарлык һәм x күчәренә параллель булган туры үткәреп булмый; димәк, функция чикләнгән.



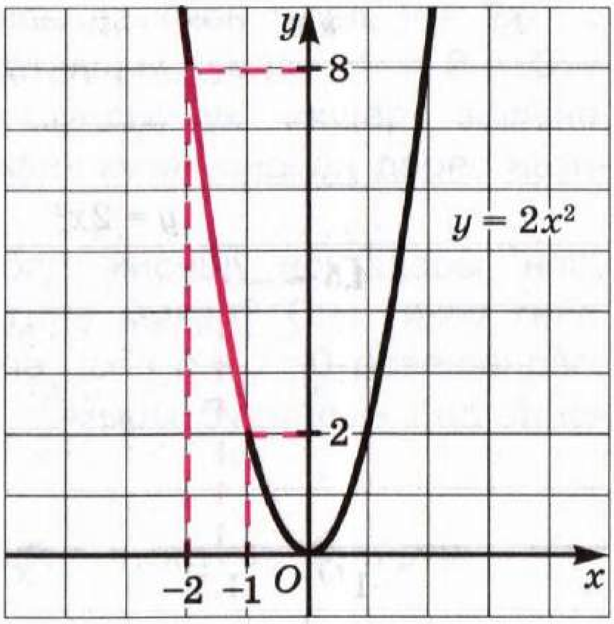
Рәс. 39

7 нче үзлек. Функциянең кыйммәтләр өлкәсе — $(-\infty; 0]$ нуры.

8 нче үзлек. Функция өскә кабарынкы.



Рәс. 40



Рәс. 41

Функция үзлекләрен санаганда, аларның нәкъ менә шушы тәртиптә урнашуы закон булып тормый, әмма хәзергә ул шулай кабул ителгән. 9 нчы сыйныфның алгебра курсында аларның урнашу тәртибе тагын да ачыкланачак.

1 нче мисал. а) [0; 2]; б) [−2; −1]; в) [−1; 1,5] кисемтәсендә $y = 2x^2$ функциясенең иң кечкенә һәм иң зур кыйммәтләрен табарга.

Чишү.

а) $y = 2x^2$ функциясенең графигын төзибез һәм аның [0; 2] кисемтәсендәге өлешен аерып алабыз (рәс. 40). Хәзер билгелибез: $y_{min} = 0$ ($x = 0$ булганда), ә $y_{max} = 8$ ($x = 2$ булганда).

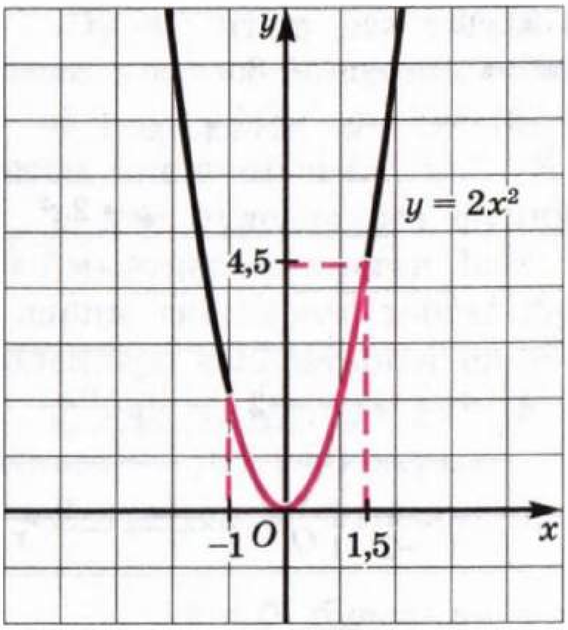
б) $y = 2x^2$ функциясенең графигын төзибез һәм аның [−2; −1] кисемтәсендәге өлешен аерып алабыз (рәс. 41). Билгелибез: $y_{min} = 2$ ($x = -1$ булганда), ә $y_{max} = 8$ ($x = -2$ булганда).

в) $y = 2x^2$ функциясенең графигын төзибез һәм аның [−1; 1,5] кисемтәсендәге өлешен аерып алабыз (рәс. 42). Билгелибез, $y_{min} = 0$ ($x = 0$ булганда), y_{max} кыйммәтенә $x = 1,5$ булганда ирешелә; аны исәплибез: $y_{max} = 2 \cdot 1,5^2 = 2 \cdot 2,25 = 4,5$.

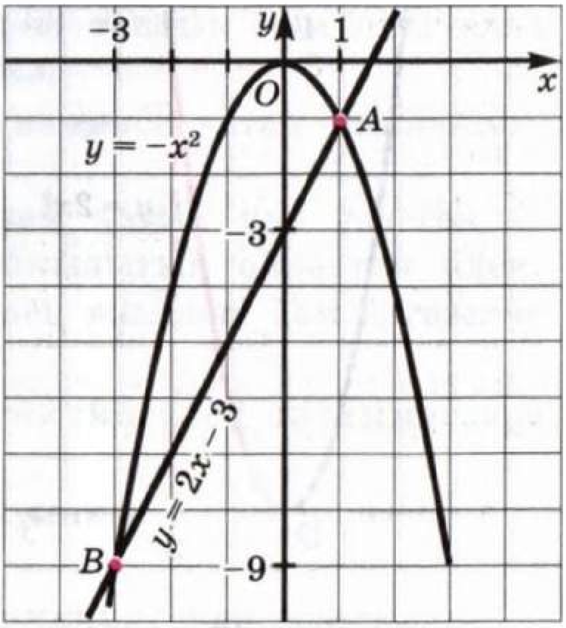
2 нче мисал. Тигезләмәне чишәргә: $-x^2 = 2x - 3$.

Чишү.

1) $y = -x^2$ һәм $y = 2x - 3$ функцияләрен тикшерәбез.



Рәс. 42



Рәс. 43

2) $y = -x^2$ функциясенең графигын — парабола төзибез (рәс. 43).

3) $y = 2x - 3$ функциясе графигын төзибез. Ул — туры булганлыктан, аны төзү өчен графикның теләсә кайсы ике ноктасын табу җитә. Әгәр $x = 0$ булса, $y = -3$, $x = 1$ булса, $y = -1$. Шулай итеп, $(0; -3)$ һәм $(1; -1)$ нокталарын таптык. Бу ике нокта аша үтүче туры ($y = 2x - 3$ функциясенең графигы) шул ук сызымда сурәтләнә (рәс. 43).

4) Сызым буенча туры белән параболаның $A(1; -1)$ һәм $B(-3; -9)$ нокталарында кисешүен күрәбез. Димәк, бирелгән тигезләмәнең ике тамыры бар: 1 һәм −3; болар — A һәм B ноктасының абсциссалары.

Җавап: 1, −3.

Искәрмә 1. Билгеле, график сурәтләргә сукырларча ышанырга ярамый (бу турыда 63–64 нче битләрдәге 2 нче искәрмәдә әйтелгән иде). Бәлки, безгә A ноктасының координаталары $(1; -1)$ булып тоела гына, чынлыкта исә алар башка төрледер, мәсәлән $(0{,}98; -1{,}01)$? Шунлыктан һәрвакыт үзеңне тикшерү файдалы. Әйтик, әлеге мисалда $A(1; -1)$ ноктасының $y = -x^2$ параболасына керүенә ышанырга кирәк (бу җиңел, $y = -x^2$ формуласына A ноктасының координаталарын кую җитә; $-1 = -1^2$ — бу дөрес тигезлек). Шуны ук $y = 2x - 3$

турысы өчен дә эшләргә кирәк (монысы да кыен түгел, $y = 2x - 3$ формуласына A ноктасының координаталары куела, $-1 = 2 - 3$ — дөрес тигезлек). B ноктасы өчен дә шундый ук тикшерү эшләнә. Бу тикшерүләр әлеге тигезләмәдә график күзәтүләрнең дөрес нәтиҗәгә китерүен раслый.

Әле тагын бер четерекле урын бар: кисешү нокталары, нәкъ графикта күрсәтелгәнчә, бары икәү генә микән? Әйе, икәү генә, әмма монысын без 4 нче бүлектә генә, $ax^2 + b + c = 0$ рәвешендәге (квадрат) тигезләмәнең икедән артык тамыры булмавын белгәннән соң дәлилли алачакбыз.

3 нче мисал. Тигезләмәләр системасын чишәргә:

$$\begin{cases} y + x^2 = 0, \\ 2x - y - 3 = 0. \end{cases}$$

Чишү. Системаның беренче тигезләмәсен $y = -x^2$ рәвешенә китерәбез. Бу функциянең графигы 43 нче рәсемдә сурәтләнгән парабола була.

Системаның икенче тигезләмәсен $y = 2x - 3$ рәвешенә китерәбез. Бу функциянең графигы 43 нче рәсемдә сурәтләнгән туры була.

Парабола һәм туры $A(1; -1)$ һәм $B(-3; -9)$ нокталарында кисешәләр. Бу нокталарның координаталары бирелгән тигезләмәләр системасының чишелеше була.

Җавап: $(1; -1)$, $(-3; -9)$.

4 нче мисал. $y = f(x)$ функциясе бирелгән, биредә

$$f(x) = \begin{cases} -0{,}5x^2, & -4 \leqslant x \leqslant 0 \text{ булганда;} \\ x + 1, & 0 < x \leqslant 1 \text{ булганда;} \\ 2x^2, & 1 < x \leqslant 2 \text{ булганда.} \end{cases}$$

а) $f(-4)$, $f(-2)$, $f(0)$, $f\left(\frac{1}{2}\right)$, $f(\sqrt{2})$, $f(2)$, $f(3)$ исәпләргә;

б) функциянең графигын төзергә;

в) графигы ярдәмендә функциянең үзлекләрен санап чыгарга.

Чишү. *а)* $x = -4$ кыйммәте $-4 \leqslant x \leqslant 0$ шартын канәгатьләндерә, димәк, $f(-4)$ не функциянең беренче юлдагы бирелеше $f(x) = -0{,}5x^2$ буенча исәпләргә кирәк:

$$f(-4) = -0{,}5 \cdot (-4)^2 = -8.$$

Шулай ук табабыз:

$$f(-2) = -0{,}5 \cdot (-2)^2 = -2;$$
$$f(0) = -0{,}5 \cdot 0^2 = 0.$$

$x = \frac{1}{2}$ кыйммәте $0 < x \leqslant 1$ шартын канәгатьләндерә, шуңа күрә $f\left(\frac{1}{2}\right)$ не функциянең икенче юлдагы бирелеше $f(x) = = x + 1$ буенча исәплибез:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + 1 = 1{,}5.$$

$x = \sqrt{2}$ кыйммәте $1 < x \leqslant 2$ шартын канәгатьләндерә, ягъни $f(\sqrt{2})$ не функциянең өченче юлдагы бирелеше $f(x) = 2x^2$ буенча исәплибез:

$$f(\sqrt{2}) = 2 \cdot (\sqrt{2})^2 = 4.$$

Шулай ук табабыз:

$$f(2) = 2 \cdot 2^2 = 8.$$

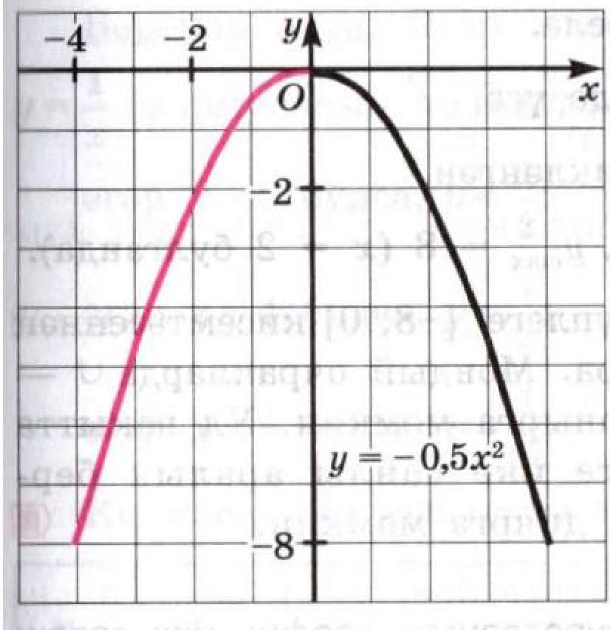
$x = 3$ кыйммәте функциянең өч бирелешенең берсен дә канәгатьләндерми, шунлыктан $f(3)$ исәпләнелми, $x = 3$ ноктасы функциясенең билгеләнү өлкәсенә керми. $f(3)$ не исәпләргә дигән бирем төгәл куелмаган.

б) Графикны «кисәкләп» төзибез. Башта $y = -0{,}5x^2$ параболасын төзибез һәм аның $[-4; 0]$ кисемтәсендәге өлешен аерып алабыз (рәс. 44). Аннан соң $y = x + 1$ турысын төзибез һәм аның $(0; 1]$ ярыминтервалындагы өлешен аерып билгелибез (рәс. 45). Соңыннан $y = 2x^2$ параболасын төзибез, аның $(1; 2]$ ярыминтервалындагы өлеше аерып алына (рәс. 46). Ниһаять, барлык өч «кисәкне» бер үк координаталар системасында сурәтлибез; $y = f(x)$ функциясенең графигын табабыз (рәс. 47).

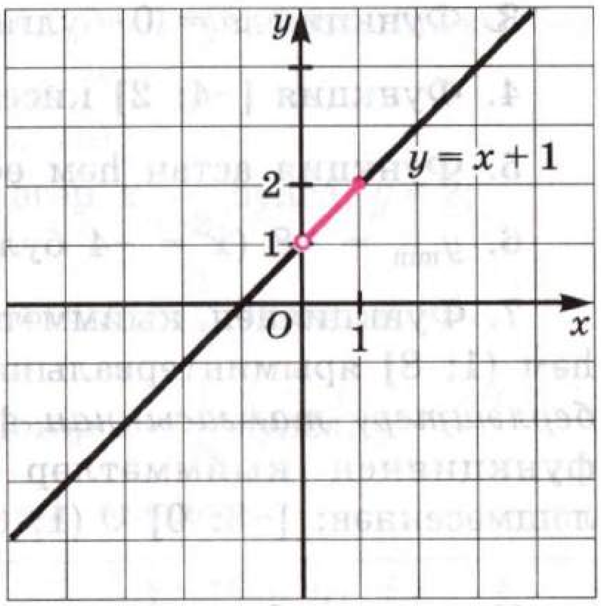
в) Функциянең үзлекләрен санап чыгабыз, яки, алдарак килешенгәнчә, графикны укыйбыз.

1. Функциянең билгеләнү өлкәсе — $[-4; 2]$ кисемтәсе.

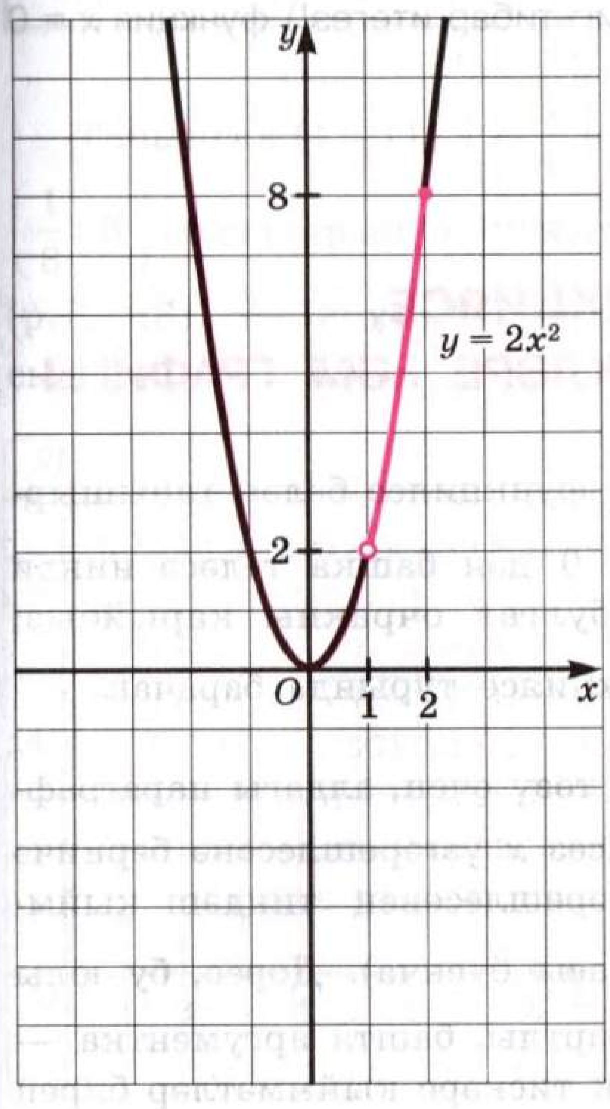
2. $x = 0$ булганда, $y = 0$; $0 < x \leqslant 2$ булганда, $y > 0$; $4 \leqslant x < 0$ булганда, $y < 0$.



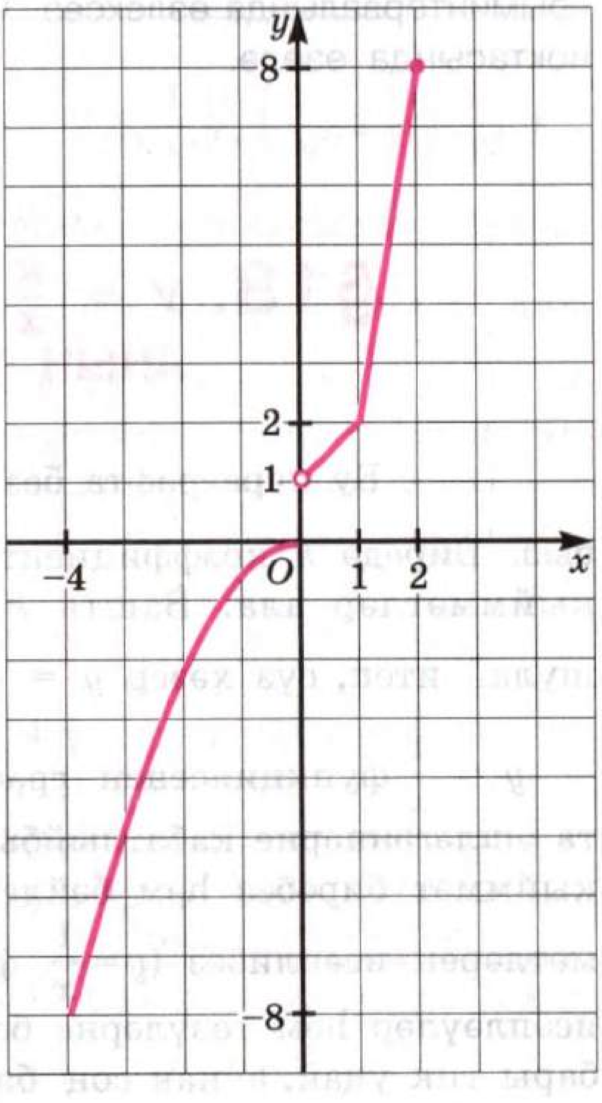
Рәс. 44



Рәс. 45



Рәс. 46



Рәс. 47

3. Функция $x = 0$ булганда өзелә.

4. Функция $[-4; 2]$ кисемтәсендә үсә.

5. Функция астан һәм өстән чикләнгән.

6. $y_{min} = -8$ ($x = -4$ булганда), $y_{max} = 8$ ($x = 2$ булганда).

7. Функциянең кыйммәтләре күплеге $[-8; 0]$ кисемтәсеннән һәм $(1; 8]$ ярыминтервалыннан тора. Мондый очракларда $\cup$ — *берләштерү тамгасыннан* файдаланырга мөмкин. Ул вакытта функциянең кыйммәтләр күплеге ике санлы аралык берләшмәсеннән: $[-8; 0] \cup (1; 8]$ тора дияргә мөмкин.

Искәрмә 2. 47 нче рәсемдә сурәтләнгән график ике тоташ «кисәктән»: $[-4; 0]$ кисемтәсендәге һәм $(0; 2]$ ярыминтервалындагы кисәкләрдән тора. Димәк, функция $[-4; 0]$ кисемтәсендә һәм $(0; 2]$ ярыминтервалында өзлексез. Ләкин (игътибар итегез!) функция $x = 0$ ноктасында өзелә.

§18. $y = \frac{k}{x}$ ФУНКЦИЯСЕ, АНЫҢ ҮЗЛЕКЛӘРЕ ҺӘМ ГРАФИГЫ

Бу параграфта без $y = \frac{k}{x}$ функциясе белән танышырбыз. Биредә k коэффициенты $k = 0$ дән башка теләсә нинди кыйммәтләр ала. Башта $k = 1$ булган очракны карыйбыз; шулай итеп, сүз хәзер $y = \frac{1}{x}$ функциясе турында барачак.

$y = \frac{1}{x}$ функциясенең графигын төзү өчен, алдагы параграфта эшләгәннәрне кабатлыйбыз: бәйсез x үзгәрешлесенә берничә кыйммәт бирәбез һәм бәйле y үзгәрешлесенең тиңдәш кыйммәтләрен исәплибез ($y = \frac{1}{x}$ формуласы буенча). Дөрес, бу юлы исәпләүләр һәм төзүләрне бер-бер артлы, башта аргументка — бары тик уңай, аннан соң бары тик тискәре кыйммәтләр биреп эшләү уңайрак булыр.

Беренче этап. Әгәр $x = 1$ булса, $y = 1$ (кабатлыйбыз, без $y=\frac{1}{x}$ формуласын кулланабыз);

әгәр $x=2$ булса, $y=\frac{1}{2}$; әгәр $x=\frac{1}{2}$ булса, $y=2$;

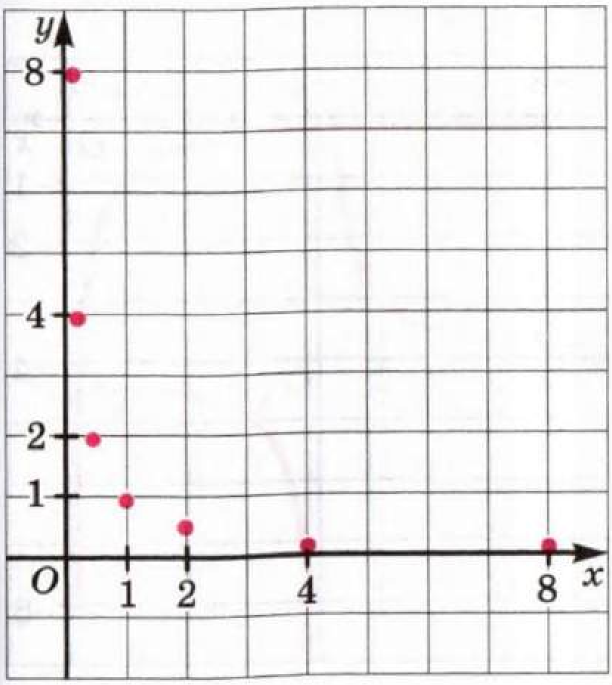
әгәр $x=4$ булса, $y=\frac{1}{4}$; әгәр $x=\frac{1}{4}$ булса, $y=4$;

әгәр $x=8$ булса, $y=\frac{1}{8}$; әгәр $x=\frac{1}{8}$ булса, $y=8$.

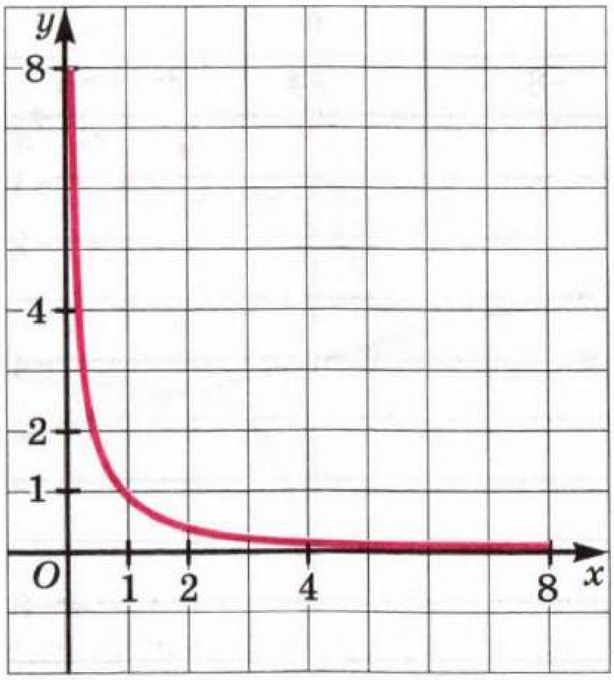
Кыскасы, без түбәндәге таблицаны төзедек:

x	1	2	4	8	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$
y	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	2	4	8

Табылган (1; 1), $\left(2; \frac{1}{2}\right)$, $\left(4; \frac{1}{4}\right)$, $\left(8; \frac{1}{8}\right)$, $\left(\frac{1}{2}; 2\right)$ $\left(\frac{1}{4}; 4\right)$, $\left(\frac{1}{8}; 8\right)$ нокталарын xOy координаталар системасында төзибез (рәс. 48). Бу нокталар ниндидер сызыкны билгелиләр, аны сызабыз (рәс. 49).



Рәс. 48



Рәс. 49

Икенче этап.

Әгәр $x=-1$ булса, $y=-1$;

әгәр $x=-2$ булса, $y=-\frac{1}{2}$;

әгәр $x=-4$ булса, $y=-\frac{1}{4}$;

әгәр $x=-8$ булса, $y=-\frac{1}{8}$;

әгәр $x=-\frac{1}{2}$ булса, $y=-2$;

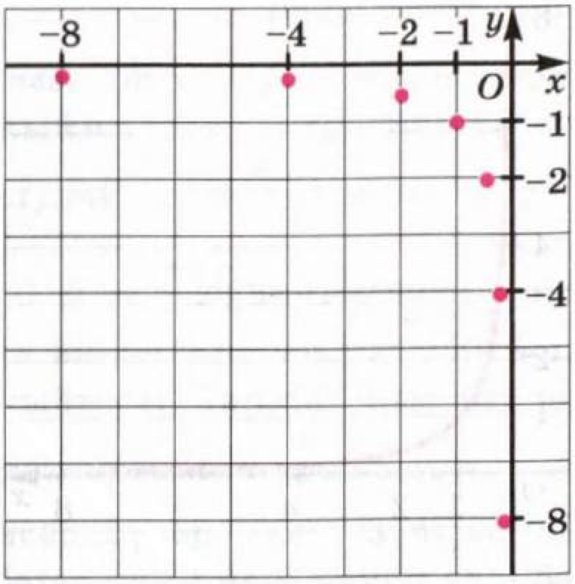
әгәр $x=-\frac{1}{4}$ булса, $y=-4$;

әгәр $x=-\frac{1}{8}$ булса, $y=-8$.

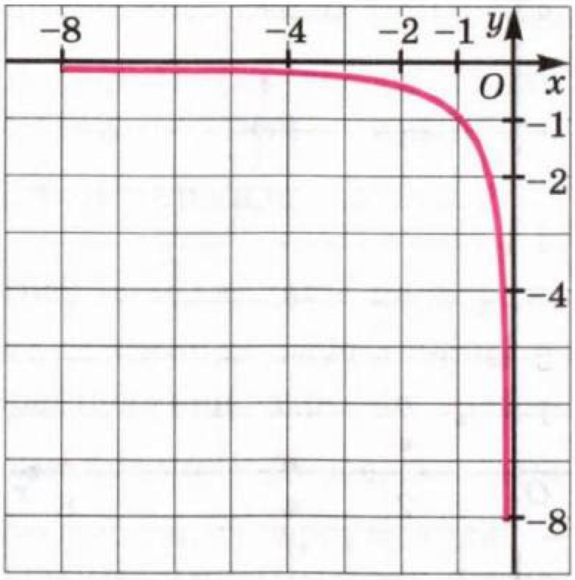
Кыскасы, без түбәндәге таблицаны төзедек:

x	-1	-2	-4	-8	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{8}$
y	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{8}$	-2	-4	-8

Табылган $(-1; -1)$, $\left(-2; -\frac{1}{2}\right)$, $\left(-4; -\frac{1}{4}\right)$, $\left(-8; -\frac{1}{8}\right)$, $\left(-\frac{1}{2}; -2\right)$, $\left(-\frac{1}{4}; -4\right)$, $\left(-\frac{1}{8}; -8\right)$ нокталарын xOy координаталар системасында төзибез (рәс. 50). Бу нокталар нindидер сызыкны билгелиләр, аны сызабыз (рәс. 51).



Рәс.50



Рәс. 51

Сүзлекчә

гипербола

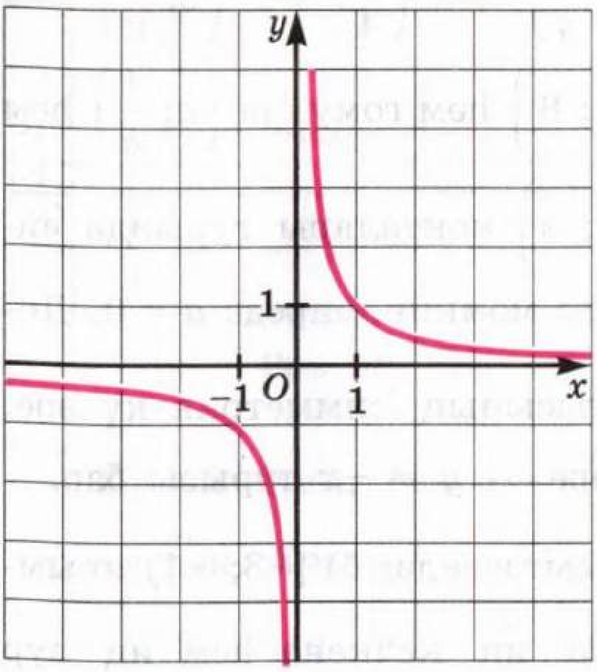
гиперболаның тармаклары

Ә хәзер ике этапны бергә берләштерәбез, ягъни ике рәсемнән (49 һәм 51) берне ясыйбыз (рәс. 52). Бу сызык $y = \frac{1}{x}$ функциясенең графигы була, аны **гипербола** дип атыйлар.

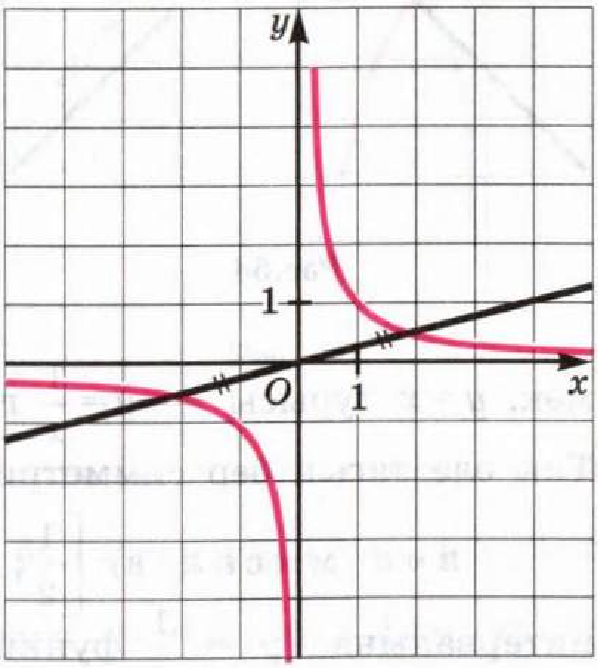
Сызымы буенча гиперболаның геометрик үзлекләрен сурәтләп карыйк.

Беренчедән, бу сызыкның парабола кебек үк нәфис булуына игътибар итик, чөнки ул да симметрияле. Координаталар башы O аша үтүче, беренче һәм өченче координата чирекләрендә урнашкан теләсә нинди туры гиперболаны бу туры өстендә ятучы һәм O ноктасыннан төрле якларда, әмма аннан бертигез ераклыкта урнашкан нокталарда кисеп үтә (рәс. 53). Аерым алганда, бу (1; 1) һәм (–1; –1), $\left(2; \frac{1}{2}\right)$ һәм $\left(-2; -\frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2}; 2\right)$ һәм $\left(-\frac{1}{2}; -2\right)$ һ.б. нокталарга хас. Димәк, O — гиперболаның симметрия үзәге. Шулай ук *гипербола координаталар башына карата симметрияле* дип тә әйтәләр.

Икенчедән, гипербола координаталар башына карата симметрияле ике өлештән тора; аларны, гадәттә, **гиперболаның тармаклары** дип йөртәләр.



Рәс. 52



Рәс. 53

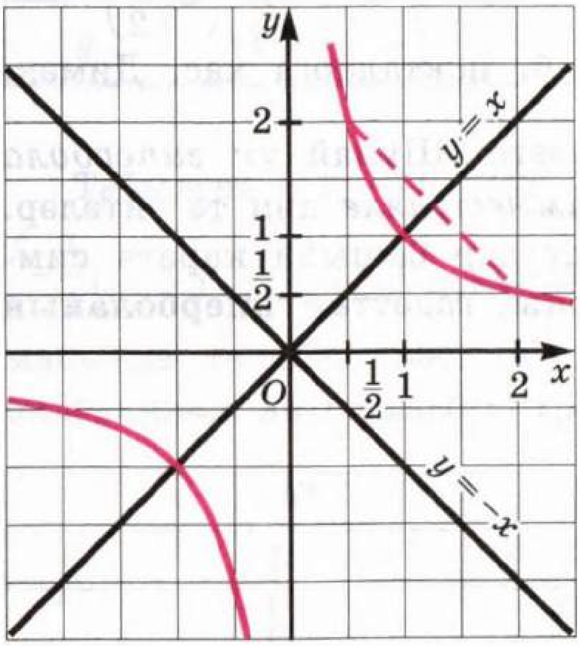
сүзлекчә

асимптота

Өченчедән, гиперболаның һәр тармагы бер юнәлештә абсциссалар күчәренә якынайганнан-якыная бара, ә икенче юнәлешендә ординаталар күчәренә якыная. Шундый очракларда тиңдәшле турыларны **асимптоталар** (басым икенче иҗектәге «и» га төшә) дип атыйлар.

Димәк, $y = \frac{1}{x}$ *функциясе графигының ике асимптотасы: x күчәре һәм y күчәре бар.*

Әгәр төзелгән графикны игътибар беләнрәк карасак, алдагылары кебек ачыктан-ачык беленми торган тагын бер геометрик үзлекне күрергә була. *Гиперболаның симметрия үзәге генә түгел, симметрия күчәре дә бар.*



Рәс.54

Чынлап та, $y = x$ турысын төзик (рәс. 54). Ә хәзер карагыз: $\left(2; \frac{1}{2}\right)$ һәм $\left(\frac{1}{2}; 2\right)$ нокталары бу турының төрле якларында, әмма аннан тигез ераклыкта урнашканнар, алар бу турыга карата симметрияле. Шуны ук $\left(4; \frac{1}{4}\right)$ һәм $\left(\frac{1}{4}; 4\right)$, $\left(8; \frac{1}{8}\right)$ һәм $\left(\frac{1}{8}; 8\right)$ һәм гомумән $\left(a; \frac{1}{a}\right)$ һәм $\left(\frac{1}{a}; a\right)$ нокталары турында әйтергә мөмкин, биредә $a \neq 0$. Димәк, $y=x$ турысы — $y=\frac{1}{x}$ гиперболасының симметрия күчәре. Тик әле тагын бер симметрия күчәре — $y = -x$ турысы бар.

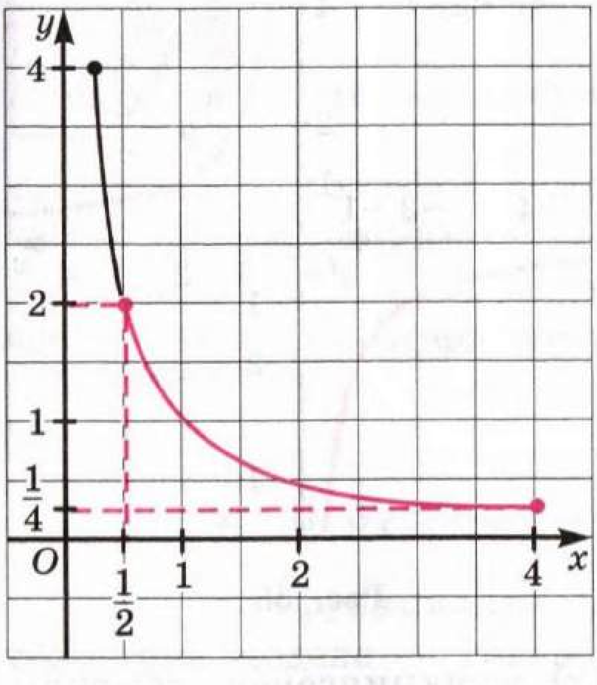
1 нче мисал. а) $\left[\frac{1}{2}; 4\right]$ кисемтәсендә; б) $[-8; -1)$ ярыминтервалында $y = \frac{1}{x}$ функциясенең иң кечкенә һәм иң зур кыйммәтләрен табарга.

Чишү. *а*) $y = \frac{1}{x}$ функциясенең графигын төзибез һәм аның *x* үзгәрешлесенең $\left[\frac{1}{2}; 4\right]$ кисемтәсендәге кыйммәтләренә туры килүче өлешен аерып билгелибез (рәс. 55). Графикның билгеләнгән өлеше өчен табабыз:

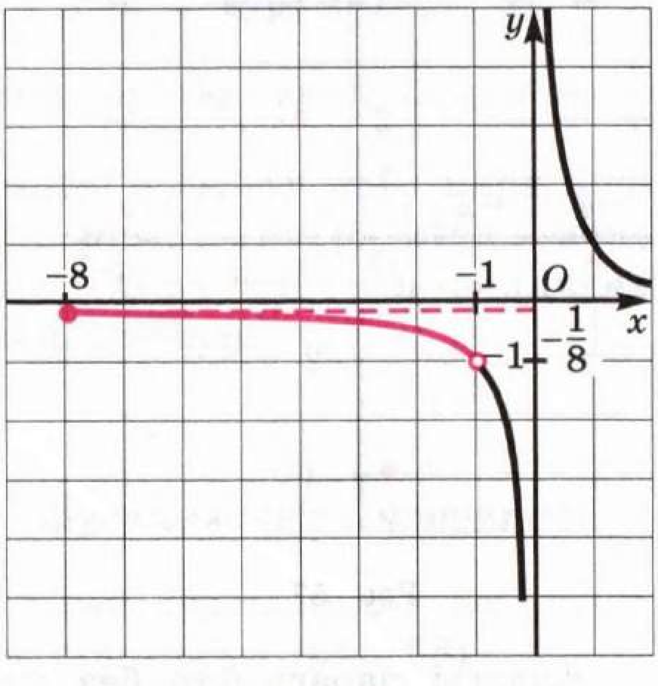
$$y_{\min} = \frac{1}{4} \text{ } (x = 4 \text{ булганда}); \; y_{\max} = 2 \left(x = \frac{1}{2} \text{ булганда}\right).$$

б) $y = \frac{1}{x}$ функциясенең графигын төзибез һәм аның *x* үзгәрешлесенең $[-8; -1)$ ярыминтервалындагы кыйммәтләренә туры килүче өлешен аерып билгелибез (рәс. 56). Графикның билгеләнгән өлеше өчен табабыз:

$$y_{\min} \text{ булмый, } y_{\max} = -\frac{1}{8} \text{ } (x = -8 \text{ булганда}).$$



Рәс. 55



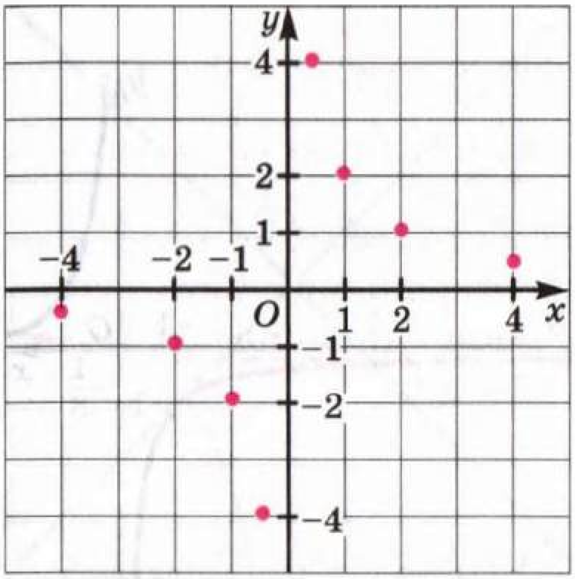
Рәс. 56

Шулай итеп, без $y = \frac{k}{x}$ функциясен $k = 1$ очрагы өчен тикшердек. Хәзер k — 1 гә тигез булмаган уңай сан, мәсәлән, $k = 2$ булсын. $y = \frac{2}{x}$ функциясен тикшерәбез һәм аның кыйммәтләр таблицасын төзибез:

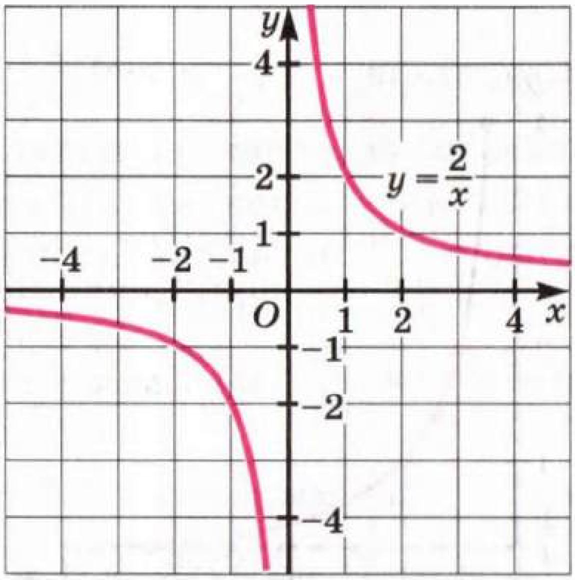
x	1	2	-1	-2	4	$\frac{1}{2}$	-4	$-\frac{1}{2}$
y	2	1	-2	-1	$\frac{1}{2}$	4	$-\frac{1}{2}$	-4

Координаталар яссылыгында (1; 2), (2; 1), (−1; −2), (−2; −1), $\left(4; \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2}; 4\right)$, $\left(-4; -\frac{1}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{2}; -4\right)$ нокталарын төзибез (рәс. 57). Алар ике тармактан торучы ниндидер сызыкны билгелиләр; аны үткәрәбез (рәс. 58). $y = \frac{1}{x}$ функциясенең графигы кебек үк, бу сызыкны да *гипербола* дип атыйлар.

Хәзер $k < 0$, мәсәлән, $k = -1$ булган очракны карыйк. $y = -\frac{1}{x}$ функциясенең графигын төзибез (биредә $k = -1$).



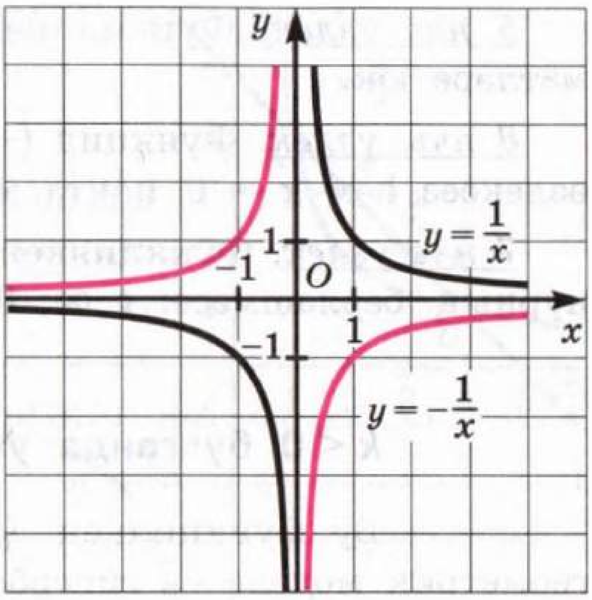
Рәс. 57



Рәс. 58

Алдагы параграфта без $y = -f(x)$ функциясенең графигы x күчәренә карата $y = f(x)$ функциясе графигына симметрияле дип өйрәнгән идек. Аерым алганда, $y = -\frac{1}{x}$ функциясе графигы абсциссалар күчәренә карата $y = \frac{1}{x}$ функциясе графигына симметрияле дигән сүз (рәс. 59). Шулай итеп, без тармаклары икенче һәм дүртенче координата чирекләрендә урнашкан гипербола табабыз.

Гомумән алганда, $y = \frac{k}{x}$ $(k \neq 0)$ ***функциясенең графигы — гипербола була, әгәр $k > 0$ булса, аның тармаклары беренче һәм өченче координата чирекләрендә*** (рәс. 58 не кара) ***һәм, $k < 0$ булса, икенче һәм дүртенче координата чирекләрендә*** (рәс. 59) ***урнаша. (0; 0) ноктасы — гиперболаның симметрия үзәге, координата күчәрләре — гиперболаның асимптоталары.***



Рәс. 59

Гадәттә, әгәр x һәм y зурлыклары $xy = k$ (k — нульгә тигез булган сан), яки $y = \frac{k}{x}$ нисбәте белән бәйләнгән булса, алар **кире пропорциональ** бәйлелектә, диләр. Шуңа күрә k коэффициентын **кире пропорциональлек коэффициенты** дип атыйлар.

кире пропорциональлек

кире пропорциональлек коэффициенты

$k > 0$ булганда $y = \frac{k}{x}$ функциясенең үзлекләре

Бу функциянең үзлекләрен сурәтләгәндә, без аның геометрик моделе — гиперболага таянырбыз (рәс. 58).

1 нче үзлек. Функциянең билгеләнү өлкәсе $x = 0$ дән башка барлык саннардан тора; моны болай язабыз: $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

2 нче үзлек. $x > 0$ булганда $y > 0$; $x < 0$ булганда $y < 0$.

3 нче үзлек. Функция $(-\infty; 0)$ һәм $(0; +\infty)$ аралыкларында кими. Бу расламa §32 та исбатланачак.

4 нче үзлек. Функция астан да, өстән дә чикләнмәгән.

5 нче үзлек. Функциянең иң зур һәм иң кечкенә кыйммәтләре юк.

6 нчы үзлек. Функция $(-\infty;\ 0)$ һәм $(0;\ +\infty)$ аралыкларында өзлексез һәм $x = 0$ ноктасында өзелә.

7 нче үзлек. Функциянең кыйммәтләре өлкәсе — ике ачык нурның берләшмәсе: $(-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$.

$k < 0$ булганда $y = \frac{k}{x}$ функциясенең үзлекләре

Бу функциянең үзлекләрен сурәтләгәндә, без аның геометрик моделе — гиперболага таянырбыз (рәс. 59).

1 нче үзлек. Функциянең билгеләнү өлкәсе $x = 0$ дән башка барлык саннардан тора: $(-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$.

2 нче үзлек. $x < 0$ булганда $y > 0$; $x > 0$ булганда $y < 0$.

3 нче үзлек. Функция $(-\infty;\ 0)$ һәм $(0;\ +\infty)$ аралыкларында үсә. Бу расламаны исбатлау § 32 та бирелгән.

4 нче үзлек. Функция астан да, өстән дә чикләнмәгән.

5 нче үзлек. Функциянең иң кечкенә һәм иң зур кыйммәтләре юк.

6 нчы үзлек. Функция $(-\infty;\ 0)$ һәм $(0;\ +\infty)$ аралыкларында өзлексез һәм $x = 0$ ноктасында өзелә.

7 нче үзлек. Функциянең кыйммәтләре күплеге — ике ачык нурның берләшмәсе: $(-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$.

2 нче мисал. Тигезләмәне чишәргә: $\frac{4}{x} = 5 - x$.

Чишү. 1) Ике функцияне: $y = \frac{4}{x}$ һәм $y = 5 - x$ ны карыйбыз.

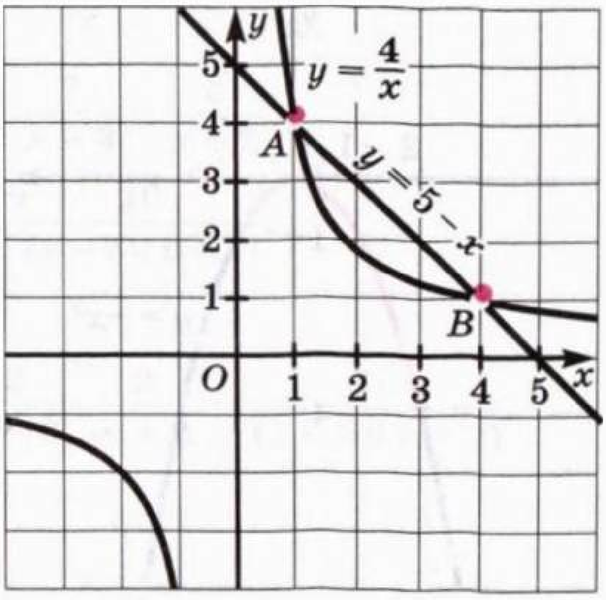
2) $y = \frac{4}{x}$ функциясенең графигын — гиперболаны төзибез (рәс. 60).

3) Сызыкча $y = 5 - x$ функциясенең графигын — турыны төзибез; аны ике ноктасы буенча төзергә мөмкин: $(0;\ 5)$ һәм $(5;\ 0)$. Ул да шул ук сызымда бирелә (рәс. 60).

4) Сызым буенча гипербола һәм турының $A(1;\ 4)$, $B(4;\ 1)$ нокталарында кисешүен билгелибез. Тикшерү моның дөреслеген күрсәтә. Димәк, бирелгән тигезләмәнең ике тамыры бар: 1 һәм 4 — болар A һәм B нокталарының абсциссалары.

Җавап: 1, 4.

2 нче мисалның чишелешенә бәйләп, алдагы параграфның искәрмәсен кабаттан укып чыгарга киңәш итәбез.



Рәс. 60

3 нче мисал. $y = f(x)$ функциясенең графигын төзергә һәм укырга, биредә

$$f(x) = \begin{cases} -x^2, & -2 \leqslant x \leqslant 1 \text{ булганда;} \\ -\frac{1}{x}, & x > 1 \text{ булганда.} \end{cases}$$

Чишү. Башта $y = -x^2$ параболасын төзибез һәм аның $[-2;\ 1]$ кисемтәсендәге өлешен аерып алабыз (рәс. 61). Аннан соң $y = -\frac{1}{x}$ гиперболасын төзибез һәм аның $(1;\ +\infty)$ ачык нурындагы өлешен билгелибез (рәс. 62). Ниһаять, ике «кисәкчекне» дә бер үк координаталар системасында сурәтлибез һәм $y = f(x)$ функциясенең графигын табабыз (рәс. 63).

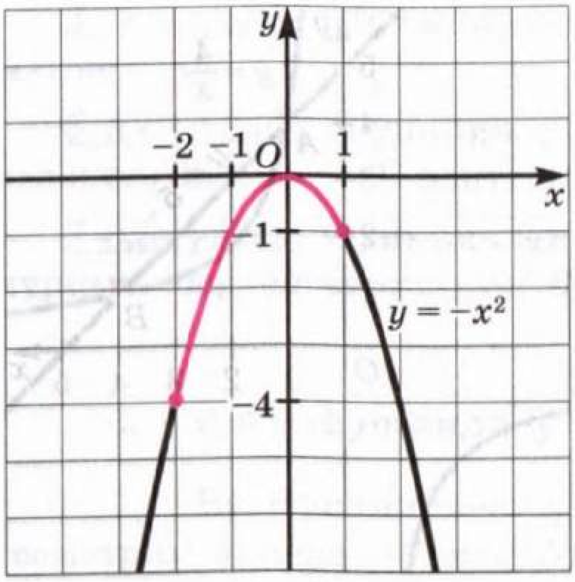
$y = f(x)$ функциясенең үзлекләрен санап чыгабыз, ягъни графикны укыйбыз.

1. Функциянең билгеләнү өлкәсе — $[-2;\ +\infty)$ нуры.

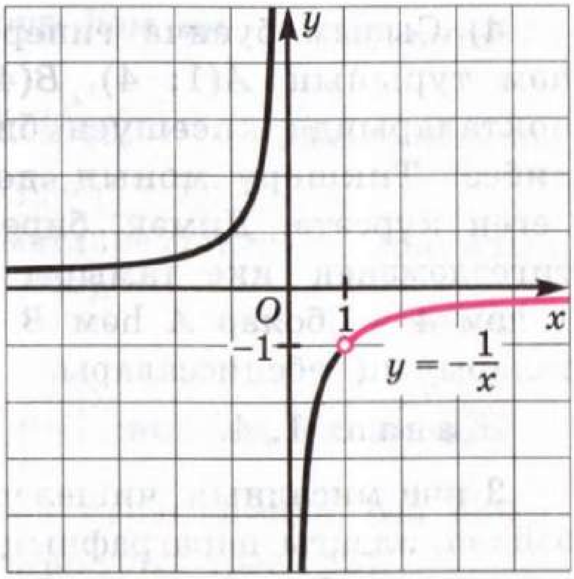
2. $x = 0$ булганда $y = 0$; $-2 \leqslant x < 0$ һәм $x > 0$ булганда $y < 0$.

3. Функция $[-2;\ 0]$ кисемтәсендә һәм $[1;\ +\infty)$ нурында үсә һәм $[0;\ 1]$ кисемтәсендә кими.

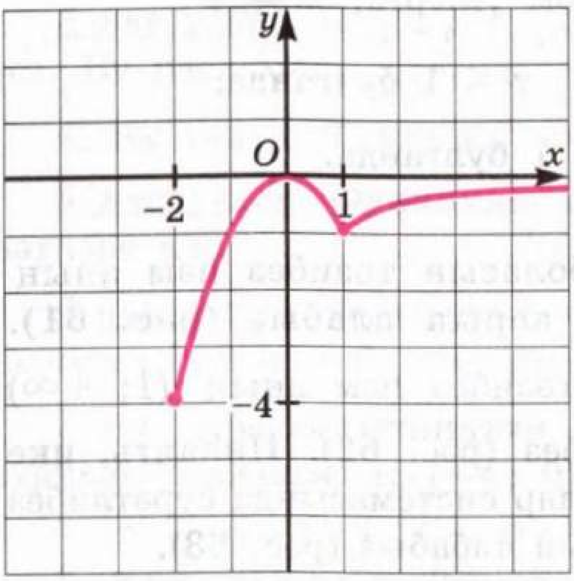
4. Функция астан да, өстән дә чикләнгән.



Рәс. 61



Рәс. 62



Рәс. 63

5. $y_{\min} = -4$ ($x = -2$ булганда), $y_{\max} = 0$ ($x = 0$ булганда).

6. Функция бирелгән билгеләнү өлкәсендә өзлексез.

7. Функциянең кыйммәтләре күплеге — $[-4; 0]$ кисемтәсе.

8. Функция $[-2; 1]$ кисемтәсендә һәм $[1; +\infty)$ нурында өскә кабарынкы.

4 нче мисал. $y = f(x)$ функциясенең, биредә $f(x) = \frac{2}{x}$, түбәндәге тигезлекне канәгатьләндерүен исбатларга:

$$f(x - 3) - f(x + 2) = 2{,}5f(x - 3) \cdot f(x + 2).$$

Чишү. Исәплибез: $f(x - 3) = \frac{2}{x - 3}$, $f(x + 2) = \frac{2}{x + 2}$.

Димәк,

$$f(x-3) - f(x+2) = \frac{2}{x-3} - \frac{2}{x+2} =$$

$$= \frac{2(x+2) - 2(x-3)}{(x-3)(x+2)} = \frac{10}{(x-3)(x+2)}.$$

Башкача язсак,

$$2{,}5f(x-3) \cdot f(x+2) = 2{,}5 \cdot \frac{2}{x-3} \cdot \frac{2}{x+2} = \frac{10}{(x-3)(x+2)}.$$

Димәк,

$$f(x-3) - f(x+2) = \frac{10}{(x-3)(x+2)}$$

һәм

$$2{,}5f(x-3) \cdot f(x+2) = \frac{10}{(x-3)(x+2)}.$$

Шулай итеп, $f(x-3) - f(x+2) = 2{,}5f(x-3) \cdot f(x+2)$, шуны исбатларга кирәк иде.

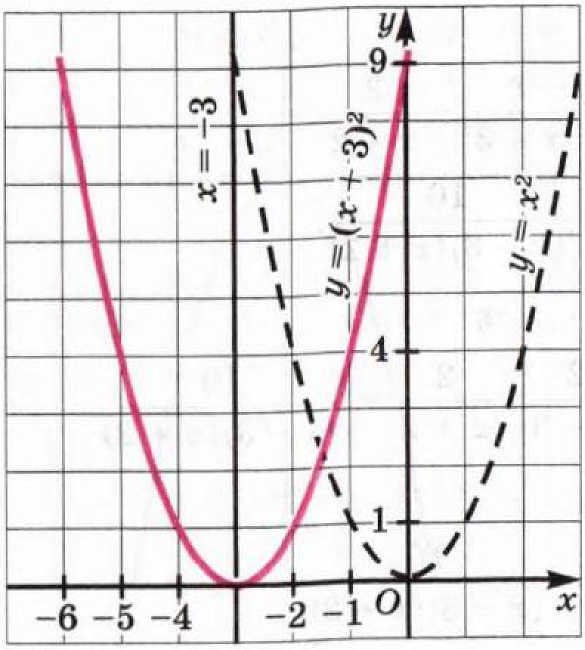
§19. ӘГӘР $y = f(x)$ ФУНКЦИЯСЕНЕҢ ГРАФИГЫ БИЛГЕЛЕ БУЛСА, $y = f(x + l)$ ФУНКЦИЯСЕНЕҢ ГРАФИГЫН НИЧЕК ТӨЗЕРГӘ

Бер үк координаталар системасында $y = x^2$ һәм $y = (x+3)^2$ функцияләренең графикларын төзибез. Беренче функциянең графигы — парабола (64 нче рәсемдә өзек-өзек сызык). $y = (x+3)^2$ функциясе өчен кыйммәтләр таблицасын төзибез:

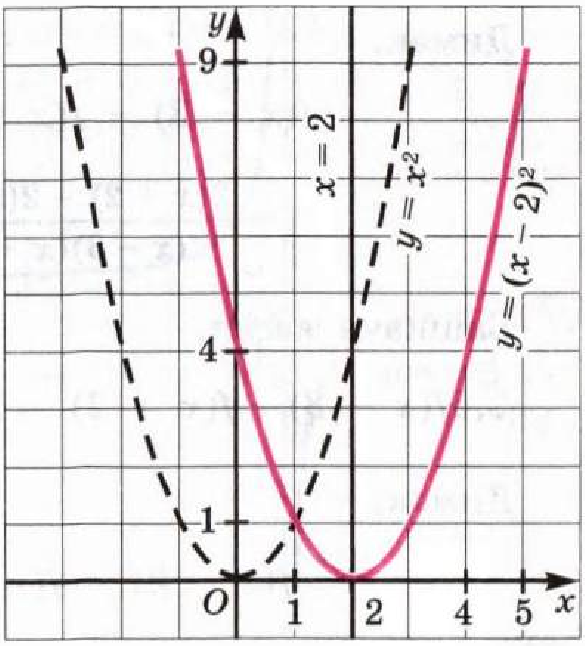
x	−3	−2	−4	−5	−1	−6	0
y	0	1	1	4	4	9	9

игътибар итегез

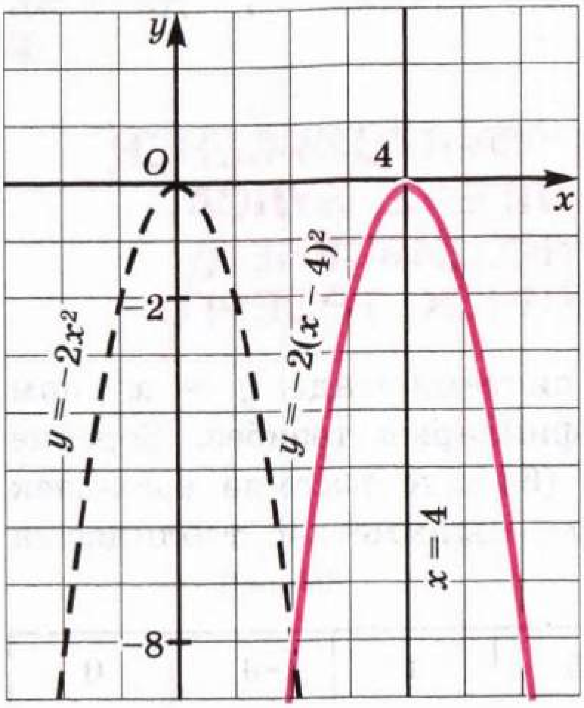
Координаталар яссылыгында (−3; 0), (−2; 1), (−4; 1), (−5; 4), (−1; 4), (−6; 9), (0; 9) нокталарын төзеп, аларны тоташтырганнан соң, парабола табабыз (64 нче рәсемдә төсле сызык). Игътибар итегез: ул да — $y = x^2$ кебек үк парабола, тик



Рәс. 64



Рәс. 65



Рәс. 66

x күчәре буенча масштабның 3 берәмлегенә *сулга* гына күчкән. Параболаның түбәсе хәзер $y = x^2$ параболасыныкы кебек (0; 0) ноктасында түгел, ә (−3; 0) ноктасында. Симметрия күчәре $y = x^2$ параболасында $x = 0$ турысы булса, бу очракта $x = -3$ турысы.

Әгәр дә бер үк координаталар системасында $y = x^2$ һәм $y = (x - 2)^2$ функцияләренең графикларын төзесәк (рәс. 65), икенче графикның беренчесен x күчәре буйлап масштабның 2 берәмлегенә күчереп (башкача аны *параллель күчерү* дип тә атыйлар) табылганын күрербез.

Башка функцияләрнең графиклары белән дә шундый ук хәл. Мәсәлән, $y = -2(x - 4)^2$ функциясенең графигы — $y = -2x^2$ параболасын x күчәре буйлап масштабның 4 берәмлегенә *уңга* күчереп (параллель күчереп) табыла (рәс. 66).

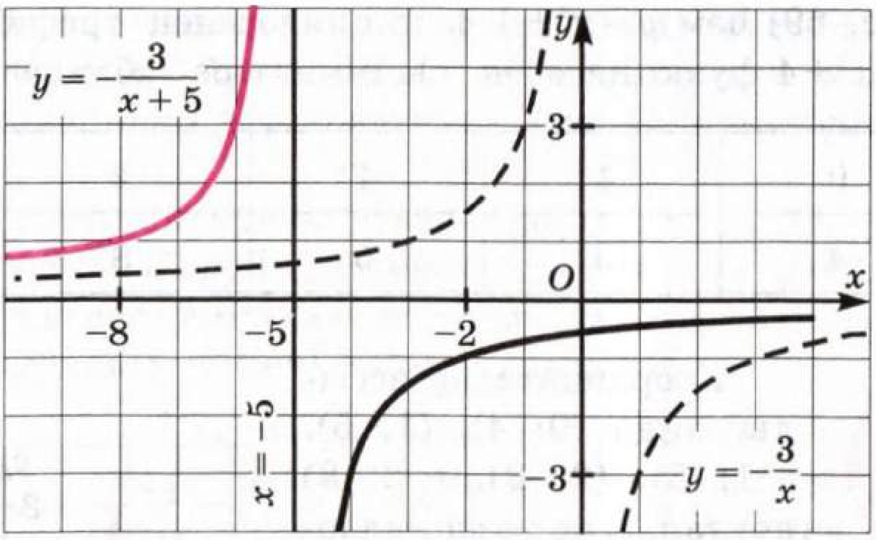
исегезгә калдырыгыз

Гомумән алганда, ***$y = f(x + l)$ функциясенең, биредә l — бирелгән уңай сан, графигын төзү өчен, $y = f(x)$ функциясенең графигын x күчәре буйлап масштабның l берәмлегенә сулга күчерергә кирәк;***

$y = f(x - l)$ функциясенең, биредә l — бирелгән уңай сан, графигын төзү өчен, $y = f(x)$ функциясенең графигын x күчәре буйлап масштабның l берәмлегенә уңга күчерергә кирәк.

1 нче мисал. $y = -\frac{3}{x+5}$ функциясенең графигын төзергә.

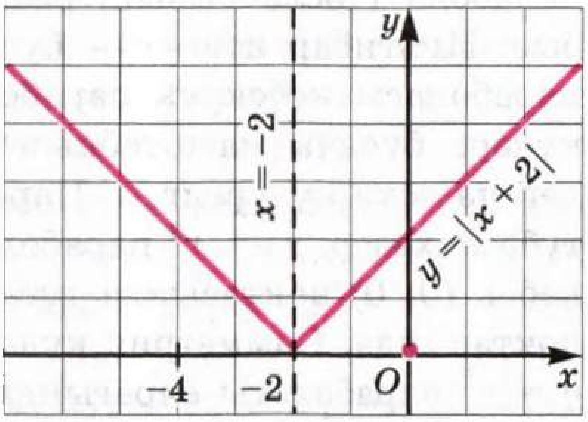
Чишү. $y = -\frac{3}{x}$ параболасын төзеп, аны x күчәре буенча 5 берәмлеккә сулга күчерәбез һәм үзебезгә кирәкле графикны табабыз (рәс. 67). Бу — асимптоталары $x = -5$ һәм $y = 0$ булган гипербола.



Рәс. 67

2 нче мисал. $y = |x + 2|$ функциясенең графигын төзергә.

Чишү. Бу функциянең графигы $y = |x|$ функциясенең графигын (80 нче биттәге 28 нче рәсем) масштабның 2 берәмлегенә сулга күчереп табыла (рәс. 68).



Рәс. 68

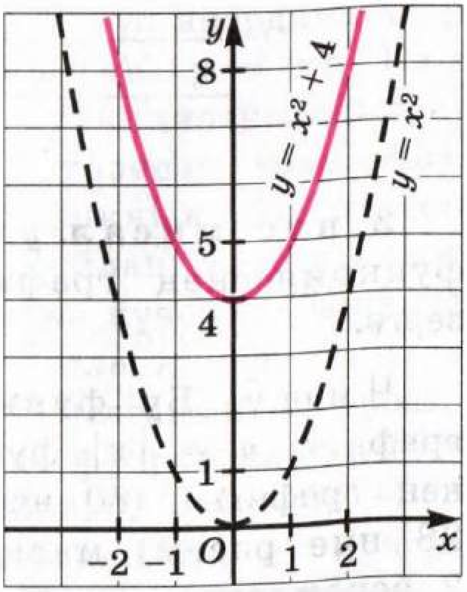
Искәрмә. Бу параграфта сүз $y = f(x + l)$ функциясенең графигын төзү хакында бара, биредә l — теләсә нинди сан, уңай да, тискәре дә булырга мөмкин иде. Сез искәрткәнсездер, $y = f(x)$ функциясенең графигын ничәдер масштаб берәмлегенә x күчәре буйлап күчерергә җыенганда, без l санының тамгасына игътибар итмәдек; график уңга яки сулган таба $|l|$ берәмлеккә күчерелде. Ә күчерү юнәлеше l санының тамгасы белән билгеләнде: $l > 0$ булганда, график — сулга, ә $l < 0$ булганда уңга күчте.

§20. ӘГӘР $y = f(x)$ ФУНКЦИЯСЕНЕҢ ГРАФИГЫ БИЛГЕЛЕ БУЛСА, $y = f(x) + m$ ФУНКЦИЯСЕНЕҢ ГРАФИГЫН НИЧЕК ТӨЗЕРГӘ

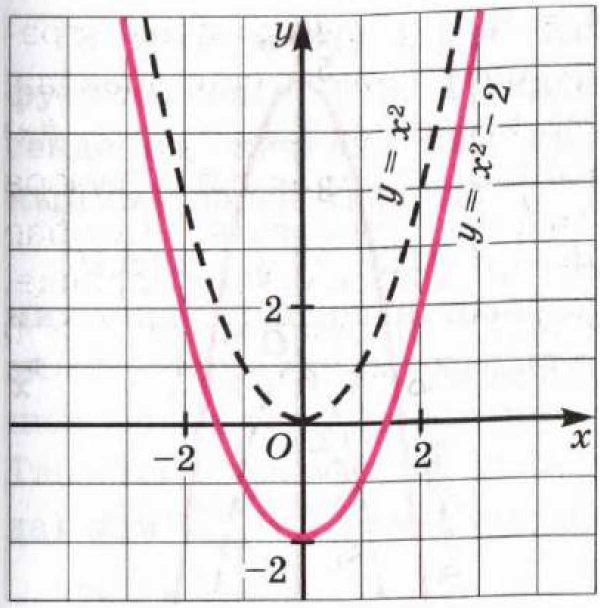
Бер үк координаталар системасында $y = x^2$ (өзек-өзек сызык, рәс. 69) һәм $y = x^2 + 4$ функцияләренең графикларын сызабыз. $y = x^2 + 4$ функциясенең кыйммәтләре таблицасын төзибез:

x	0	1	−1	2	−2
y	4	5	5	8	8

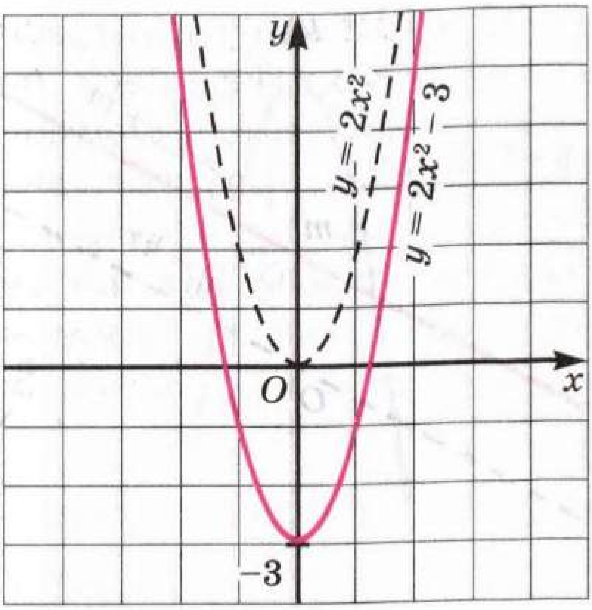
Координаталар яссылыгында (0; 4), (1; 5), (−1; 5), (2; 8), (−2; 8) нокталарын төзеп, аларны тоташтырабыз һәм парабола (төсле сызык, рәс. 69) табабыз. Игътибар итегез — бу да $y = x^2$ параболасы кебек үк парабола, тик y күчәре буенча масштабның 4 берәмлегенә *өскә* күчерелгән. Параболаның түбәсе хәзер $y = x^2$ параболасыныкы кебек (0; 0) ноктасында түгел, ә (0; 4) ноктасында. Симметрия күчәре булып, $y = x^2$ параболасы очрагындагы кебек, $x = 0$ турысы тора.



Рәс. 69



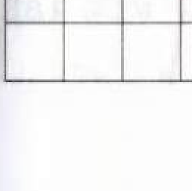
Рәс. 70



Рәс. 71

Әгәр бер үк координаталар яссылыгында $y = x^2$ һәм $y = x^2 - 2$ функцияләренең графикларын төзесәк (рәс. 70), икенче графикның беренчесен y күчәре буйлап масштабның 2 берәмлегенә *аска* күчерелгәнен (параллель күчерелгәнен) күрәбез.

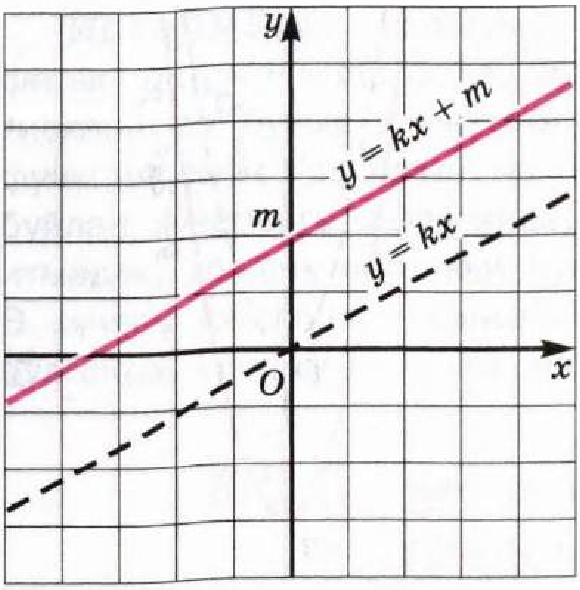
Башка функцияләрнең графиклары да шулай ук төзелә. Мәсәлән, $y = 2x^2 - 3$ функциясенең графигы — $y = 2x^2$ параболасын y күчәре буйлап масштабның 3 берәмлегенә *аска* күчереп (параллель күчереп) табыла (рәс. 71).



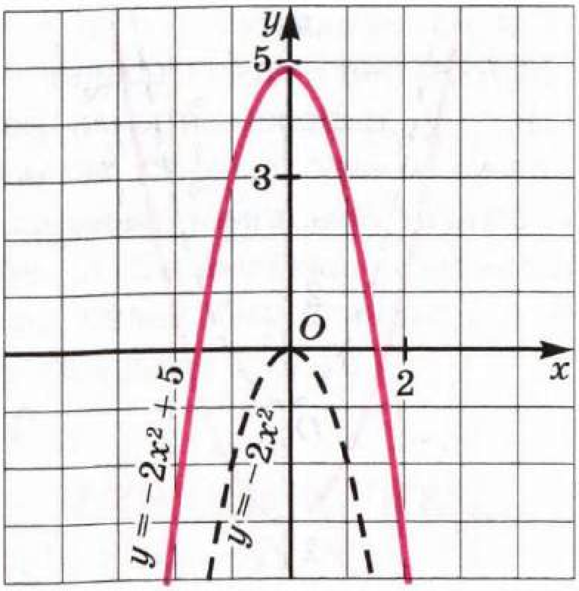
Гомумән алганда, ***$y = f(x) + m$ функциясенең графигын (биредә m — бирелгән уңай сан) төзү өчен, $y = f(x)$ функциясенең графигын y күчәре буйлап масштабның m берәмлегенә өскә күчерергә кирәк;***

$y = f(x) - m$ функциясенең графигын (биредә m — бирелгән уңай сан) төзү өчен, $y = f(x)$ функциясенең графигын y күчәре буйлап масштабның m берәмлегенә аска күчерергә кирәк.

Ә бит бу нәтиҗә сезнең өчен яңалык түгел. Исегезгә төшерегез, $y = kx$ һәм $y = kx + m$ функцияләре графиклары ничек төзелгән иде: болар ике параллель туры, берсе ($y = kx$) координаталар башы аша, ә икенчесе — ($y = kx + m$) — (0; m) ноктасы аша үтә, ягъни ул беренче турыны y күчәре буйлап m берәмлеккә күчереп табылган булган (рәс. 72).



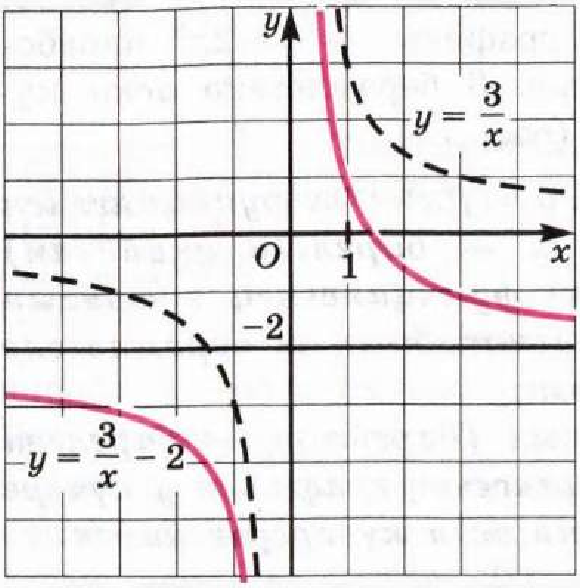
Рәс. 72



Рәс. 73

1 нче мисал. $y = -2x^2 + 5$ функциясенең графигын төзергә.

Чишү. $y = -2x^2$ параболасын төзеп, аны y күчәре буенча 5 берәмлеккә өскә күчерәбез һәм $y = -2x^2 + 5$ функциясенең графигын табабыз (рәс. 73). ■



Рәс. 74

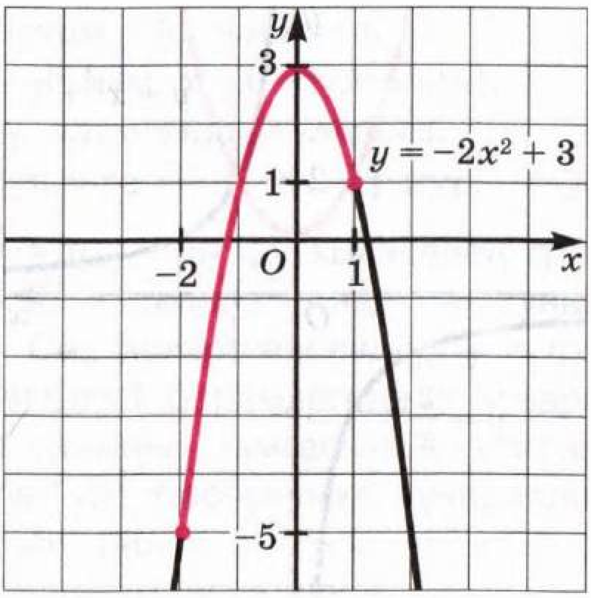
2 нче мисал. $y = \frac{3}{x} - 2$ функциясенең графигын төзергә.

Чишү. $y = \frac{3}{x}$ гиперболасын төзеп һәм аны y күчәре буйлап 2 берәмлеккә аска күчереп, $y = \frac{3}{x} - 2$ функциясенең графигын табабыз (рәс. 74). Игътибар итегез, гиперболаның горизонталь асимптотасы да 2 берәмлеккә аска күчте: $y = \frac{3}{x}$ гиперболасы өчен асимптота булып x күчәре ($y = 0$ турысы) торса, $y = \frac{3}{x} - 2$ гиперболасының асимптотасы — $y = -2$ турысы була. Вертикаль асимптота шул ук кала: $x = 0$. ■

3 нче мисал. $y = -2x^2 + 3$ функциясенең $[-2; 1]$ кисемтәсендә иң кечкенә һәм иң зур кыйммәтләрен табарга.

Чишү. $y = -2x^2 + 3$ функциясенең графигын төзибез һәм аның $[-2; 1]$ кисемтәсендәге өлешен аерып тикшерәбез (рәс. 75). Табабыз $y_{min} = -5$ ($x = -2$ булганда) һәм $y_{max} = 3$ ($x = 0$ булганда).

Җавап: $y_{min} = -5$, $y_{max} = 3$.



Рәс. 75

4 нче мисал. Тигезләмәне чишәргә: $\frac{2}{x} = x^2 + 1$.

Чишү.

1) Ике функцияне: $y = \frac{2}{x}$ һәм $y = x^2 + 1$ не карыйбыз.

2) $y = \frac{2}{x}$ — функциясенең графигын — гиперболаны төзибез (рәс. 76).

3) $y = x^2 + 1$ функциясенең графигын төзибез. Бу — шул ук сызымда сурәтләнгән парабола (рәс. 76).

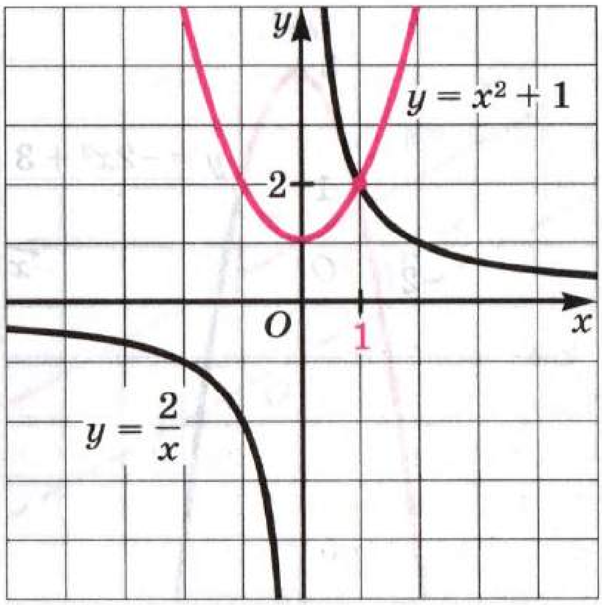
4) Сызым буенча билгелибез, парабола һәм гипербола $A(1; 2)$ ноктасында кисешәләр. Тикшереп карау $A(1; 2)$ ноктасының ике графикта да ятуын күрсәтә. Тигезләмәнең бердәнбер тамыры бар: $x = 1$.

Җавап: 1.

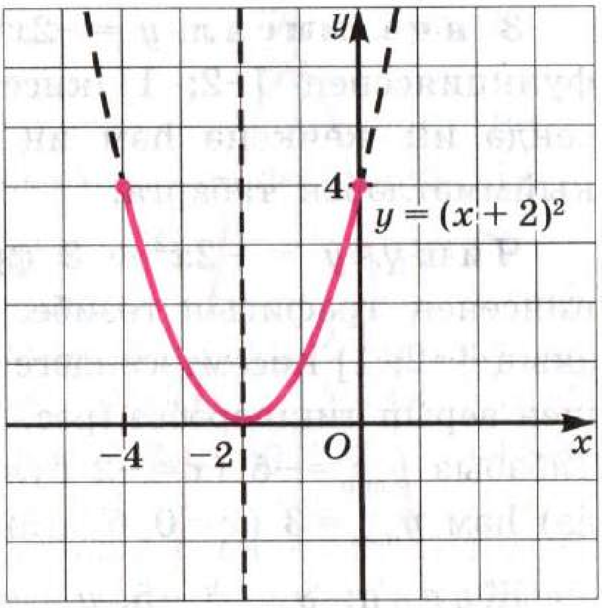
5 нче мисал. $y = f(x)$ функциясенең графигын төзергә һәм укырга, биредә

$$f(x) = \begin{cases} (x + 2)^2, & -4 \leqslant x \leqslant 0 \text{ булганда;} \\ 4 - x^2, & x > 0 \text{ булганда.} \end{cases}$$

Чишү. Башта $y = (x + 2)^2$ параболасын төзибез һәм аның $[-4; 0]$ кисемтәсендәге өлешен аерып алабыз (рәс. 77). Аннан соң $y = 4 - x^2$ параболасын төзибез һәм аның $(0; +\infty)$



Рәс. 76



Рәс.77

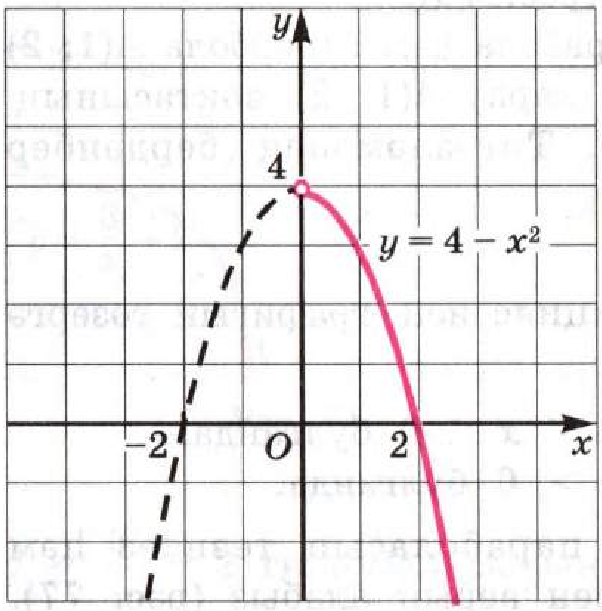
ачык нурындагы өлешен аерып алабыз (рәс. 78). Ниһаять, ике «кисәкчекне» дә бер үк координаталар системасында сурәтлибез — $y = f(x)$ функциясенең графигы табыла (рәс. 79).

$y = f(x)$ функциясенең үзлекләрен санап чыгабыз, ягъни графикны укыйбыз.

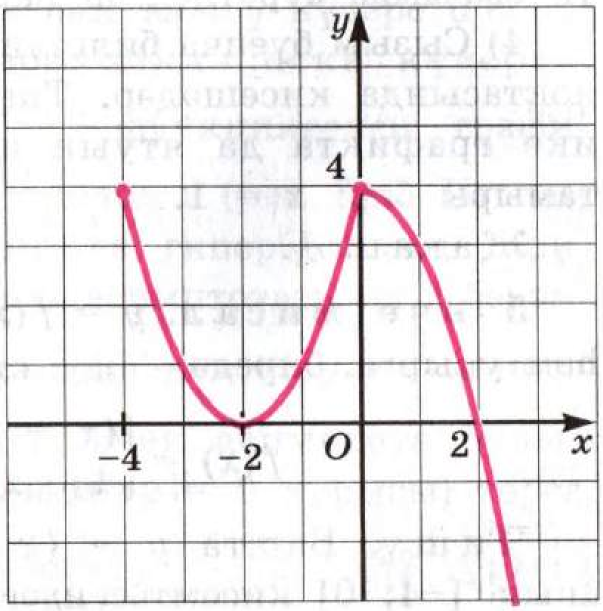
1. Функциянең билгеләнү өлкәсе — $[-4; +\infty)$ нуры.

2. $x = -2$ һәм $x = 2$ булганда $y = 0$; $-4 \leqslant x < -2$ һәм $-2 < x < 2$ булганда $y > 0$; $x > 2$ булганда, $y < 0$.

3. Функция $[-4; -2]$ һәм $[0; +\infty)$ аралыкларында кими, $[-2; 0]$ кисемтәсендә үсә.



Рәс. 78



Рәс. 79

4. Функция өстән чикләнгән, астан чикләнмәгән.
5. y_{min} — булмый, $y_{max} = 4$ ($x = -4$ һәм $x = 0$ булганда).
6. Функция бирелгән билгеләнү өлкәсендә өзлексез.
7. Функциянең кыйммәтләр күплеге — $(-\infty; 4]$ нуры. ■

Искәрмә. Бу параграфта сүз $y = f(x) + m$ функциясенең графигын төзү хакында барды, биредә m — теләсә нинди сан, уңай да, тискәре дә булырга мөмкин иде. Сез искәрткәнсездер, $y = f(x)$ функциясенең графигын ничәдер масштаб берәмлегенә y күчәре буйлап күчерергә җыенганда, без m санының тамгасына игътибар итмәдек; график уңга яки сулга таба $|m|$ берәмлеккә күчерелде. Ә күчерү юнәлеше m санының тамгасы белән билгеләнде: $m > 0$ булганда график — өскә, ә $m < 0$ булганда аска күчте.

§21. ӘГӘР $y = f(x)$ ФУНКЦИЯСЕНЕҢ ГРАФИГЫ БИЛГЕЛЕ БУЛСА, $y = f(x + l) + m$ ФУНКЦИЯСЕНЕҢ ГРАФИГЫН НИЧЕК ТӨЗЕРГӘ

$y = f(x + l) + m$ функциясенең графигын, § 19 һәм § 20 та өйрәнгән рәвешүзгәртүләрне бер-бер артлы кулланып, $y = f(x)$ функциясе графигыннан алырга мөмкин.

1 нче мисал. $y = (x - 2)^2 - 3$ функциясе графигын төзергә.

Чишү. Төзүне этапларга бүлеп эшлибез.

Беренче этап. $y = x^2$ функциясенең графигын төзибез (өзек-өзек сызык, рәс. 80).

Икенче этап. $y = x^2$ параболасын 2 берәмлеккә уңга күчереп, $y = (x - 2)^2$ функциясе графигын табабыз (тоташ кара сызык, рәс. 80).

Өченче этап. $y = (x - 2)^2$ параболасын 3 берәмлеккә аска күчереп, $y = (x - 2)^2 - 3$ функциясенең графигын табабыз (төсле сызык, рәс. 80). ■

сорау ? ! җавап

Искәрмә. Үзенең һәр адымын уйлап эшли торган математикка мондый чишү юлы, чынлыкта ул абсолют дөрес булса да, бик үк охшап бетмәячәк. Миңа нигә өч график төзергә, дияр ул, мин бит

4. Функция өстән чикләнгән, астан чикләнмәгән.
5. y_{min} — булмый, $y_{max} = 4$ ($x = -4$ һәм $x = 0$ булганда).
6. Функция бирелгән билгеләнү өлкәсендә өзлексез.
7. Функциянең кыйммәтләр күплеге — $(-\infty; 4]$ нуры.

Искәрмә. Бу параграфта сүз $y = f(x) + m$ функциясенең графигын төзү хакында барды, биредә m — теләсә нинди сан, уңай да, тискәре дә булырга мөмкин иде. Сез искәрткәнсездер, $y = f(x)$ функциясенең графигын ничәдер масштаб берәмлегенә y күчәре буйлап күчерергә җыенганда, без m санының тамгасына игътибар итмәдек; график уңга яки сулга таба $|m|$ берәмлеккә күчерелде. Ә күчерү юнәлеше m санының тамгасы белән билгеләнде: $m > 0$ булганда график — өскә, ә $m < 0$ булганда аска күчте.

§21. ӘГӘР $y = f(x)$ ФУНКЦИЯСЕНЕҢ ГРАФИГЫ БИЛГЕЛЕ БУЛСА, $y = f(x + l) + m$ ФУНКЦИЯСЕНЕҢ ГРАФИГЫН НИЧЕК ТӨЗЕРГӘ

$y = f(x + l) + m$ функциясенең графигын, § 19 һәм § 20 та өйрәнгән рәвешүзгәртүләрне бер-бер артлы кулланып, $y = f(x)$ функциясе графигыннан алырга мөмкин.

1 нче мисал. $y = (x - 2)^2 - 3$ функциясе графигын төзергә.

Чишү. Төзүне этапларга бүлеп эшлибез.

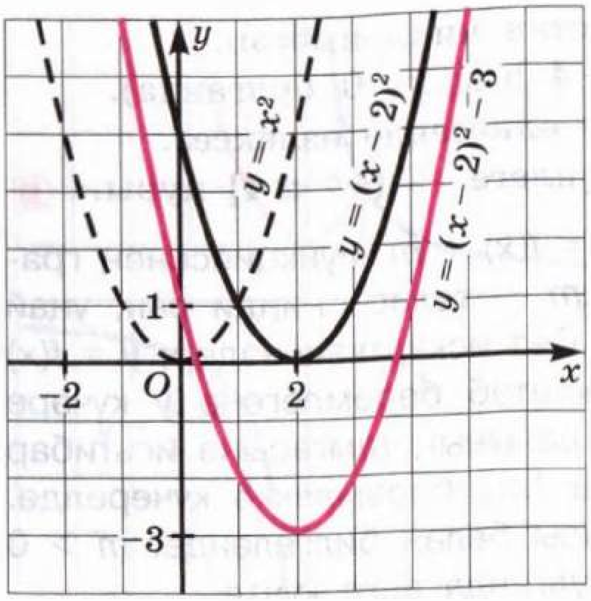
Беренче этап. $y = x^2$ функциясенең графигын төзибез (өзек-өзек сызык, рәс. 80).

Икенче этап. $y = x^2$ параболасын 2 берәмлеккә уңга күчереп, $y = (x - 2)^2$ функциясе графигын табабыз (тоташ кара сызык, рәс. 80).

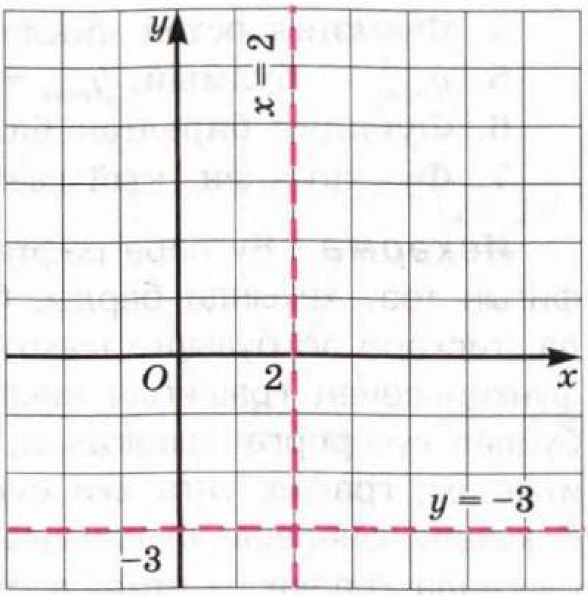
Өченче этап. $y = (x - 2)^2$ параболасын 3 берәмлеккә аска күчереп, $y = (x - 2)^2 - 3$ функциясенең графигын табабыз (төсле сызык, рәс. 80).

сорау ?! җавап

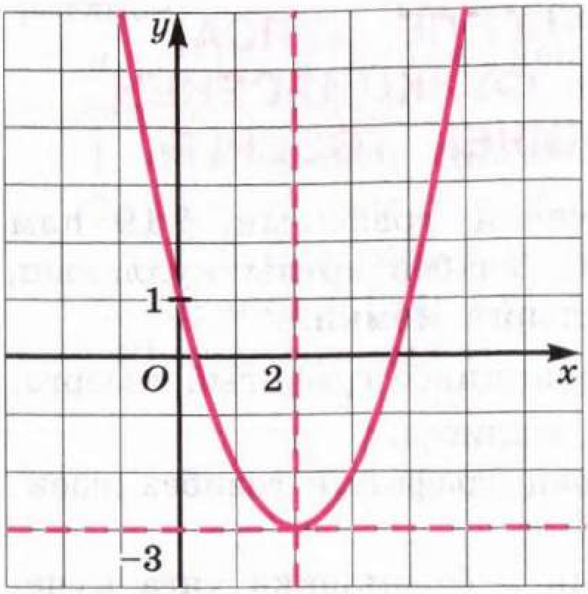
Искәрмә. Үзенең һәр адымын уйлап эшли торган математикка мондый чишү юлы, чынлыкта ул абсолют дөрес булса да, бик үк охшап бетмәячәк. Миңа нигә өч график төзергә, дияр ул, мин бит



Рәс. 80



Рәс. 81

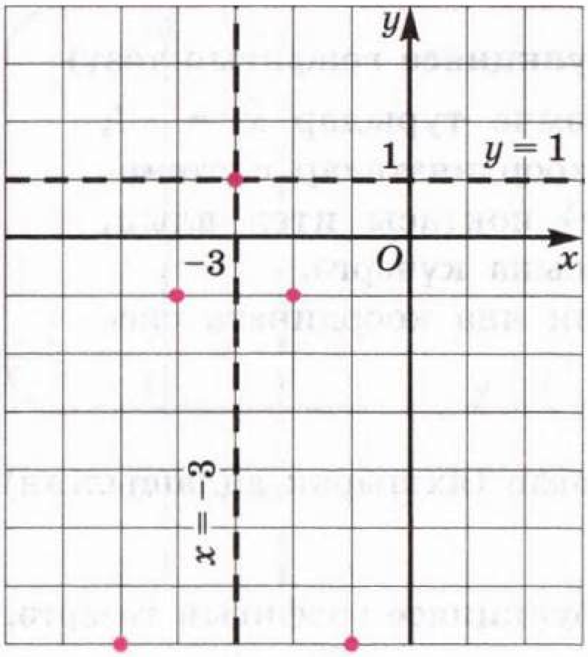


Рәс. 82

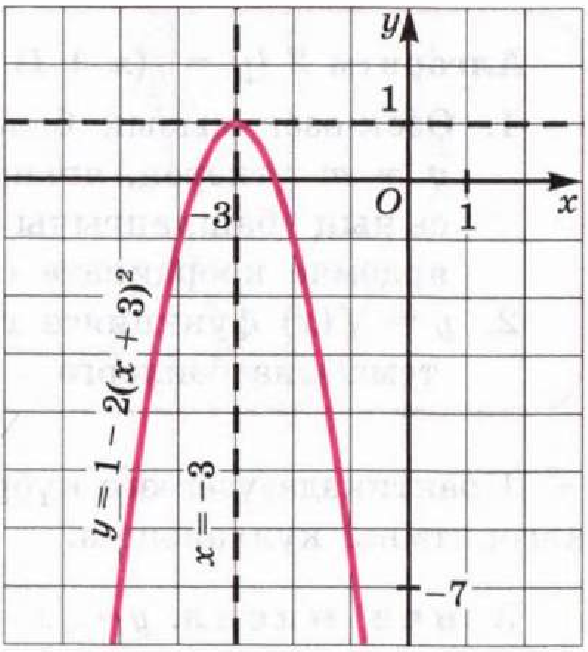
бер график кына да төзи алам. Чынлыкта $y = (x - 2)^2 - 3$ функциясенең графигы — ул бит $y = x^2$ функциясе графигы булып торучы шул ук парабола, тик аның түбәсе генә (2; −3) ноктасына күчкән. Шуңа күрә мин болай итәм: башлангычы (2; −3) ноктасында булган ярдәмче координаталар системасына күчәм, дияр математик. Моның өчен $x = 2$ һәм $y = -3$ турылары төзим (өзек-өзек сызык белән) (рәс. 81). Бу ярдәмче системада $y = x^2$ параболасы шаблонын кулланып (математиклар мондый очракларда «$y = x^2$ функциясен яңа координаталар системасына бәйлибез» дип шаярталар), кирәкле графикны табам (рәс. 82).

Алдагы мисалны чишкәндә, математикның киңәшенә колак салырбыз.

2 нче мисал. $y = -2(x + 3)^2 + 1$ функциясенең графигын төзергә.



Рәс. 83



Рәс. 84

Чишү. 1) Башлангычы $(-3;\ 1)$ ноктасы булган ярдәмче координаталар системасына күчәбез (83 нче рәсемдә $x = -3$ һәм $y = 1$ өзек-өзек сызыклары).

2) $y = -2x^2$ функциясен яңа координаталар системасына бәйлибез. Моны болай эшләргә була. $y = -2x^2$ функциясе графигы өчен контроль нокталар сайлыйбыз: мәсәлән, $(0;\ 0)$, $(1;\ -2)$, $(-1;\ -2)$, $(2;\ -8)$, $(-2;\ -8)$, тик аларны *иске координата системасында түгел, ә яңасында төзибез* (бу нокталар 83 нче рәсемдә билгеләнгән). Аннан соң, табылган нокталар аша парабола үткәрәбез; шушы график кирәк иде дә (рәс. 84).

Шулай итеп, $y = f(x + l) + m$ функциясенең графигын төзүнең ике алгоритмын таптык.

Алгоритм 1 ($y = f(x + l) + m$ функциясе графигын төзү)

1. $y = f(x)$ функциясе графигын төзергә.
2. $y = f(x)$ графигын x күчәре буенча $|l|$ берәмлеккә, әгәр $l > 0$ булса — сулга һәм $l < 0$ булса — уңга параллель күчерергә.
3. Икенче адымда табылган графикны y күчәре буенча $|m|$ берәмлеккә, әгәр $m > 0$ булса — өскә һәм $m < 0$ булса — аска параллель күчерергә.

Алгоритм 2 ($y = f(x + l) + m$ функциясе графигын төзү)

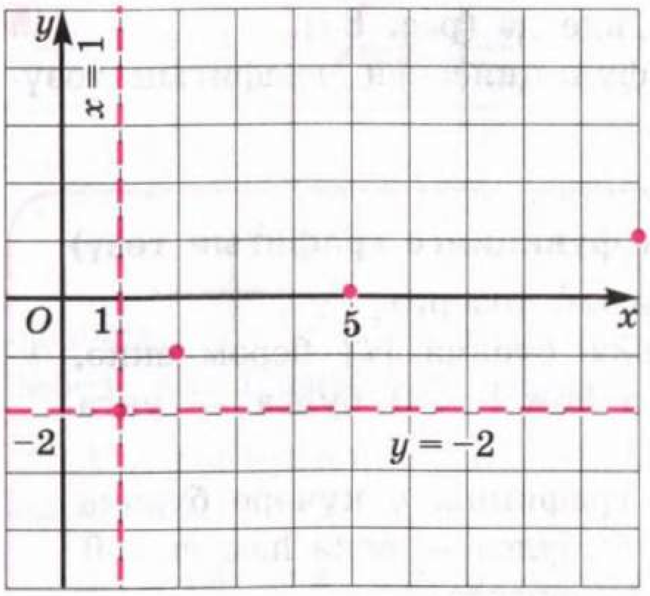
1. Өзек-өзек сызык белән ярдәмче турылар $x = -l$, $y = m$ үткәреп, ягъни яңа координаталар системасының башлангычы $(-l;\ m)$ ноктасы итеп алып, ярдәмче координата системасына күчәргә.
2. $y = f(x)$ функциясе графигын яңа координата системасына бәйләргә.

Практикада үзегезгә күбрәк ошаган (яхшырак аңлашылган) алгоритмны кулланыгыз.

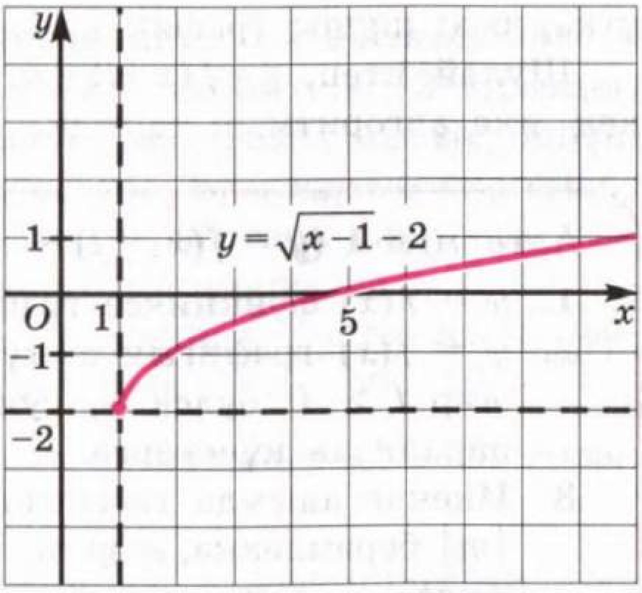
3 нче мисал. $y=\sqrt{x-1}-2$ функциясе графигын төзергә.

Чишү. 1) Башлангычы $(1; -2)$ ноктасында булган координаталар системасына күчәбез (85 нче рәсемдә өзек-өзек $x = 1$ һәм $y = -2$ турылары).

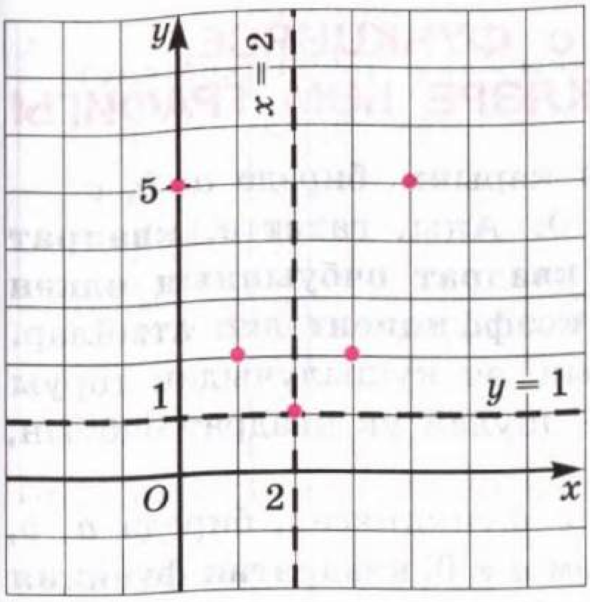
2) $y = \sqrt{x}$ функциясен яңа координата системасына бәйлибез. Моның өчен $y = \sqrt{x}$ функциясе өчен контроль нокталар, мәсәлән, $(0; 0)$, $(1; 1)$, $(4; 2)$, $(9; 3)$ сайлап алабыз, тик аларны иске координаталар системасында түгел, яңасында төзибез. Параболаның сайлап алынган нокталар аша үтүче тармагын төзибез — эзләнелгән график килеп чыга (рәс. 85). ■



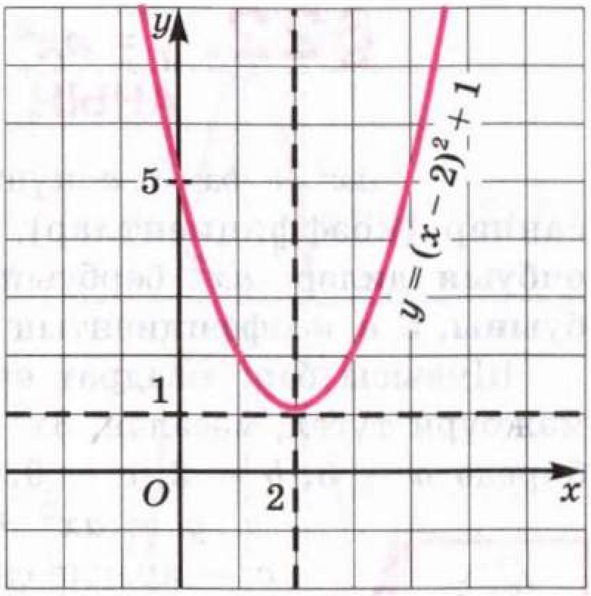
Рәс. 85



Рәс. 86



Рәс. 87



Рәс.88

4 нче мисал. $y = x^2 - 4x + 5$ функциясе графигын төзергә.

Чишү. Сез, мөгаен, бу мисалның без өйрәнә торган графикларга нинди катнашы бар дип уйлагансыздыр? Турыдан-туры катнашы бар икән. Моңа ышану өчен, $x^2 - 4x + 5$ өчбуынына карата *тулы квадрат аерып алу юлын* кулланабыз (ул сезгә 7 нче сыйныф алгебра курсыннан таныш):

$$x^2 - 4x + 5 = (x^2 - 4x + 4) + 1 = (x - 2)^2 + 1.$$

$y = (x - 2)^2 + 1$ функциясе графигын төзү өчен, башлангычы (2; 1) ноктасында булган ярдәмче координаталар системасына күчәбез (87 нче рәсемдә өзек-өзек сызык белән $x = 2$ һәм $y = 1$ турылары). Яңа координата системасына $y = x^2$ функциясен бәйлибез. Моның өчен $y = x^2$ функциясе өчен контроль нокталар, мәсәлән, (0; 0), (1; 1), (−1; 1), (2; 4), (−2; 4) не сайлап алабыз, тик аларны иске координаталар системасында түгел, ә яңасында төзибез (бу нокталар 87 нче рәсемдә билгеләнгән). Шушы нокталар буенча парабола төзибез; эзләнелгән график килеп чыга (рәс. 88). ■

§22. $y = ax^2 + bx + c$ ФУНКЦИЯСЕ, АНЫҢ ҮЗЛЕКЛӘРЕ ҺӘМ ГРАФИГЫ

$ax^2 + bx + c$ күпбуынын карыйк, биредә a, b, c — саннар (коэффициентлар), ә $a \neq 0$. Аны, гадәттә, **квадрат өчбуын** диләр; ax^2 бербуынын — **квадрат өчбуынның өлкән буыны**, ә a коэффициентын **өлкән коэффициент** дип атыйлар.

Шунысы бар: квадрат өчбуынның өч кушылучыдан торуы мәҗбүри түгел, мәсәлән, $3x^2 + 2x$ — шулай ук квадрат өчбуын, биредә $a = 3$, $b = 2$, $c = 0$.

квадрат өчбуын

квадратик функция

$y = ax^2 + bx + c$ функциясен, биредә a, b, c — ирекле саннар һәм $a \neq 0$, **квадратик функция** дип тә атыйлар. $ax^2 + bx + c$ өчбуынының өлкән буыны x ның квадратын үз эченә алганлыктан, ул әлеге исем белән йөртелә.

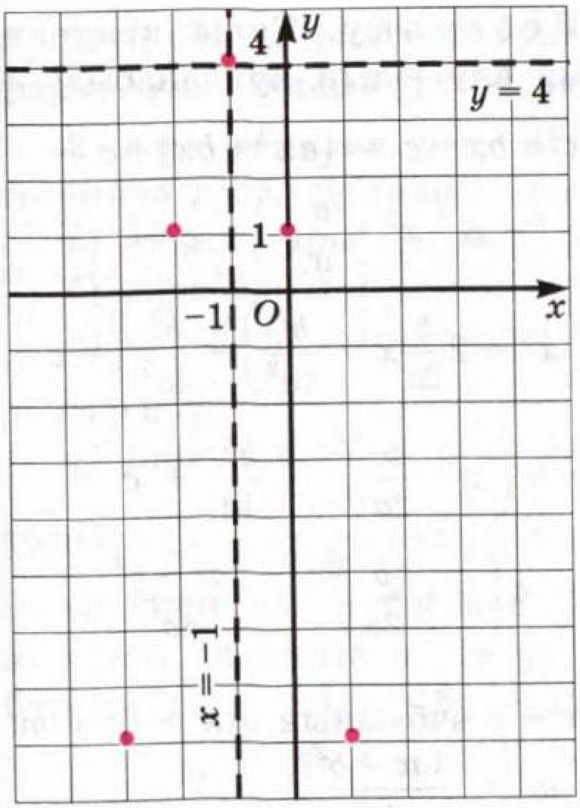
Моннан алдан табылган нәтиҗәләргә таянып, без сезнең белән теләсә кайсы квадратик функциянең графигын төзи алабыз. Узган параграф ахырында тулы квадрат аерып алу юлы белән шундый графикларның берсен төзегән идек. Тагын бер мисал карап үтик.

1 нче мисал. $y = -3x^2 - 6x + 1$ функциясенең графигын төзергә.

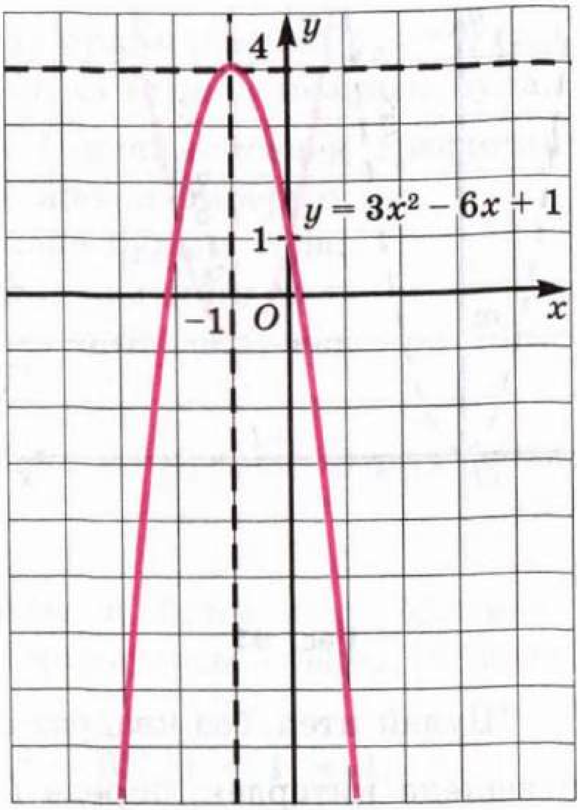
Чишү. $-3x^2 - 6x + 1$ квадрат өчбуынында тулы квадрат аерып алабыз:

$$-3x^2 - 6x + 1 = -3(x^2 + 2x) + 1 = -3((x^2 + 2x + 1) - 1) + 1 =$$
$$= -3((x + 1)^2 - 1) + 1 = -3(x + 1)^2 + 3 + 1 = -3(x + 1)^2 + 4.$$

$y = -3(x + 1)^2 + 4$ функциясе графигын төзү өчен, башлангычы $(-1; 4)$ ноктасында булган ярдәмче координаталар системасына күчәбез ($x = -1$ һәм $y = 4$ өзек сызыклар, рәс. 89). $y = -3x^2$ функциясен яңа координата системасына бәйлибез. Моның өчен $y = -3x^2$ функциясе өчен контроль нокталар, мәсәлән, $(0; 0)$, $(1; -3)$, $(-1; -3)$, $(2; -12)$, $(-2; -12)$ нокталарын сайлап алабыз; әмма аларны *иске координата системасында түгел, ә яңасында* билгелибез (бу нокталар 89 нчы рәсемдә бирелгән). Әлеге нокталар буенча парабола төзибез — эзләнелгән график табыла (рәс. 90).



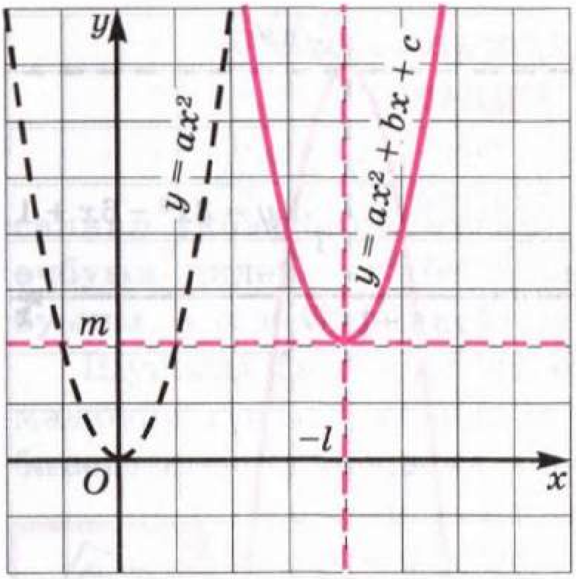
Рәс. 89



Рәс. 90

Шулай итеп, тулы квадрат аерып алу алымын кулланып, без квадрат өчбуынны $a(x+l)^2 + m$ рәвешенә китердек һәм § 21 тагы 2 нче алгоритмнан файдаландык (тагын кабатлыйбыз, сезгә күбрәк ошый икән — 1 нче алгоритмны да куллана аласыз). $y = -3x^2 - 6x + 1$ функциясенең графигы $y = -3x^2$ параболасын параллель күчереп табылган парабола икән. Ә узган параграф ахырында без $y = x^2 - 4x + 5$ функциясе графигының да парабола икәнлеген ачыклаган идек; ул $y = x^2$ параболасын параллель күчереп табылды. Димәк, *теләсә нинди квадратик $y = ax^2 + bx + c$ функциясенең графигын $y = ax^2$ параболасын параллель күчереп табып була* икән, һәм бу расламаны исбатлау өчен дә *тулы квадрат аерып алу* кулланыла.

Теорема ***$y = ax^2 + bx + c$ квадратик функциясенең графигы $y = ax^2$ параболасын параллель күчереп табылган парабола була.***



Рәс. 91

Исбатлау. Тулы квадрат аерып алу юлын кулланабыз:

$$ax^2+bx+c = (ax^2+bx)+c =$$
$$= a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c =$$
$$= a\left(\left(x^2+2\frac{b}{2a}x+\frac{b^2}{4a^2}\right)-\frac{b^2}{4a^2}\right)+c =$$
$$= a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+c =$$
$$= a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}.$$

Шулай итеп, без квадрат ax^2+bx+c өчбуынын $a(x+l)^2+m$ рәвешенә китердек, биредә $l=\frac{b}{2a}$, $m=\frac{4ac-b^2}{4a}$.

$y=a(x+l)^2+m$ функциясе графигын төзү өчен, $y=ax^2$ параболасын аның түбәсе $(-l;\ m)$ ноктасында булырлык итеп параллель күчерергә кирәк (рәс. 91). Теорема исбатланды.

игътибар итегез

Түбәндәге мөһим бер нәрсәгә игътибар итегез: исбатлау нәтиҗәсендә $y=ax^2+bx+c$ параболасының түбәсе булып $(-l;\ m)$ ноктасы торуы ачыкланды. Параболаның күчәре — $x=-l$ турысы, ягъни $x=-\frac{b}{2a}$.

исегездә калдырыгыз

Шулай итеп, ***$y=ax^2+bx+c$ параболасының күчәре булып $x=-\frac{b}{2a}$ турысы тора, $y=ax^2+$ $+bx+c$ параболасы түбәсенең абсциссасы x_0 түбәндәге формула буенча исәпләнә:***

$$x_0=-\frac{b}{2a}.$$

Парабола түбәсенең ординатасы формуласын (сүз $y_0=m$, ягъни $y_0=\frac{4ac-b^2}{4a}$ формуласы турында бара) истә калдыру мәҗбүри түгел. Беренчедән, бу бик зур формула, икенчедән,

x_0 абсциссасы билгеле булганда, y_0 ординатасын $y_0 = f(x_0)$ формуласы (биредә $f(x) = ax^2 + bx + c$) буенча исәпләп була.

2 нче мисал. $y = -3x^2 - 6x + 1$ функциясенең графигын төземичә генә, түбәндәге сорауларга җавап бирергә:

а) нинди туры параболаның күчәре булып тора;

б) парабола түбәсенең координаталары нинди;

в) парабола тармаклары кая (өскә яки аска) юнәлгән?

Чишү.

а) Биредә $a = -3$, $b = -6$. Парабола күчәренең формуласын төзибез: $x = -\frac{b}{2a}$, ягъни $x = -1$.

б) Парабола түбәсенең абсциссасы x_0 безгә инде билгеле: $x_0 = -1$. Ордината y_0 не $y_0 = f(x_0)$ формуласы буенча табабыз, биредә $f(x) = -3x^2 - 6x + 1$.

$$y_0 = f(x_0) = f(-1) = -3(-1)^2 - 6(-1) + 1 = 4.$$

Димәк, параболаның түбәсе — $(-1; 4)$.

в) $y = -3x^2 - 6x + 1$ параболасы $y = -3x^2$ параболасын параллель күчереп табыла. $y = -3x^2$ параболасының тармаклары аска юнәлгән (чөнки x^2 алдындагы коэффициент тискәре), димәк, $y = -3x^2 - 6x + 1$ параболасы тармаклары да аска юнәлә. ◼

Искәрмә. 1 һәм 2 нче мисалларны чагыштырыгыз. Аларда сүз бер үк парабола турында бара, тик без 1 нче мисалда аны төзедек, ә 2 нче мисалда параболаны төзү кирәк булмады. 90 нчы рәсем буенча 2 нче мисалдагы җавапларның дөреслеген тикшерегез.

сорау ?! җавап

$y = ax^2 + bx + c$ рәвешле теләсә нинди функция өчен, аның графигын — параболаны төземичә генә, 2 нче мисалда куелган сорауларга җавап биреп була. Иң җиңел җавап — парабола тармакларының юнәлеше турында:

$y = ax^2 + bx + c$ параболасының тармаклары $a > 0$ булганда — өскә, $a < 0$ булганда аска таба юнәләләр.

Парабола күчәре тигезләмәсен, $x = -\frac{b}{2a}$ ны табу бераз катлаулырак (исәпләргә туры килә). Һәм парабола түбәсенең координаталарын табу — арада иң кыены (исәпләүләр күбрәк):

аның абсциссасы $x_0 = -\frac{b}{2a}$ саны, ә y_0 ординатасы $y_0 = f(x_0)$ формуласы яки $y_0 = \frac{4ac - b^2}{4a}$ формуласы буенча исәпләнә, биредә $f(x) = ax^2 + bx + c$.

3 нче мисал. $y = 2x^2 - 6x + 1$ функциясенең графигын төзергә.

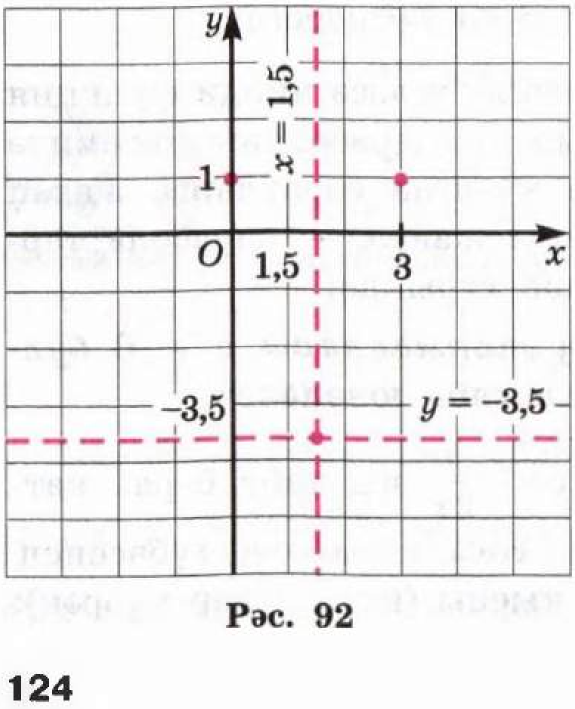
Чишү. Функциянең графигы — тармаклары өскә юнәлгән парабола, чөнки өлкән коэффициент 2 — уңай сан. Парабола түбәсенең координаталарын табыйк:

$$a = 2,\ b = -6;\ x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-6}{2 \cdot 2} = 1{,}5;\ y_0 = f(x_0) = f(1{,}5),$$

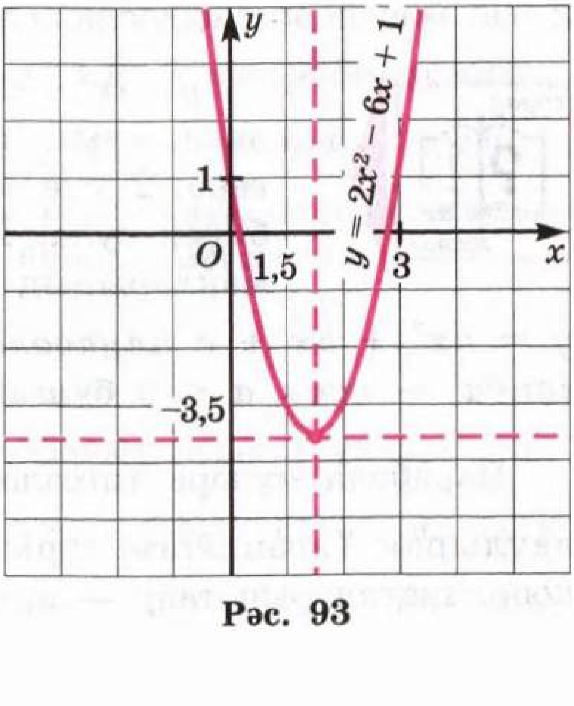
биредә $f(x) = 2x^2 - 6x + 1$. Димәк,

$$y_0 = f(1{,}5) = 2 \cdot 1{,}5^2 - 6 \cdot 1{,}5 + 1 = -3{,}5.$$

92 нче рәсемдә $(1{,}5; -3{,}5)$ ноктасы — параболаның түбәсе билгеләнгән, парабола күчәре үткәрелгән. Параболаның үзен төзү өчен болай эшлибез: x күчәрендә парабола күчәренә карата симметрияле ике нокта, мәсәлән, $x = 0$ һәм $x = 3$ нокталарын алабыз һәм, $f(0) = f(3)$ икәнен истә тотып, нокталарда функциянең кыйммәтләрен исәплибез. $f(0) = 1$, димәк, $f(3) = 1$. Бу нокталар 92 нче рәсемдә билгеләнгән. Ә хәзер өч ноктасы буенча эзләнелгән параболаны үткәрәбез (рәс. 93).



Рәс. 92



Рәс. 93

Шуның белән без квадратик функция графигын төзүнең алгоритмын эшләдек.

$y = ax^2 + bx + c$ параболасын төзү алгортимы

1. Парабола түбәсенең координаталарын табарга, координаталар яссылыгында тиңдәшле ноктаны төзергә, парабола күчәрен үткәрергә.
2. x күчәрендә парабола күчәренә карата симметрияле ике нокта билгеләргә (күбесенчә бу нокталарның берсе итеп $x = 0$ ноктасын алалар), бу нокталарда функциянең кыйммәтләрен табарга; координаталар яссылыгында тиңдәшле нокталарны төзергә.
3. Табылган өч нокта аша парабола үткәрергә (кайвакыт парабола күчәренә симметрияле тагын бер пар нокта алалар һәм параболаны биш ноктасы буенча төзиләр).

4 нче мисал. $y = -2x^2 + 8x - 5$ функциясенең $[0; 3]$ кисемтәсендә иң кечкенә һәм иң зур кыйммәтләрен табарга.

Чишү.

Беренче этап. Бирелгән функциянең графигы булып торучы параболаны төзибез. Алгоритмнан файдаланабыз.

1) Табабыз:

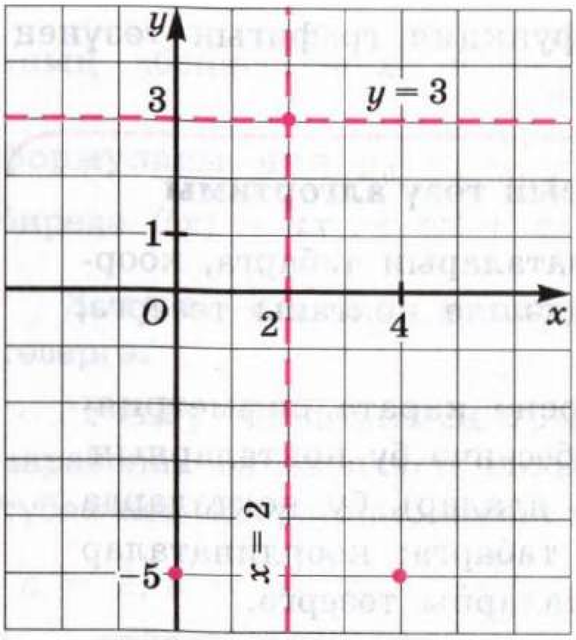
$$a = -2,\ b = 8,\ x_0 = -\frac{b}{2a} = 2;$$

$$y_0 = f(2) = -2 \cdot 2^2 + 8 \cdot 2 - 5 = 3.$$

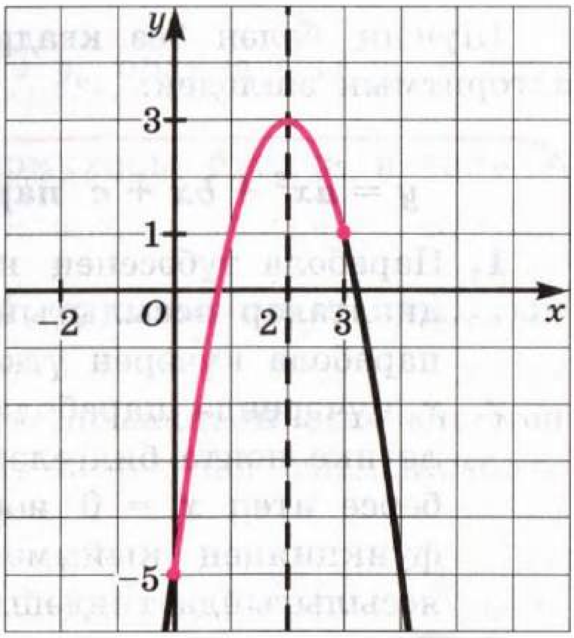
Димәк, параболаның түбәсе — $(2; 3)$ ноктасы, ә параболаның күчәре — $x = 2$ турысы (рәс. 94).

2) x күчәрендә парабола күчәренә карата симметрияле ике нокта, мәсәлән, $x = 0$ һәм $x = 4$ нокталарын алабыз. $f(0) = f(4) = -5$; координата яссылыгында $(0; -5)$ һәм $(4; -5)$ нокталарын төзибез (рәс. 94).

3) $(2; 3)$, $(0; -5)$, $(4; -5)$ нокталары аша парабола үткәрәбез (рәс. 95).



Рәс. 94



Рәс. 95

Икенче этап. Төзелгән графикның [0; 3] кисемтәсендәге өлешен аерып алабыз. 95 нче рәсемдә төсле сызык белән билгеләнгән өлештә $y_{min} = -5$ ($x = 0$ булганда), ә $y_{max} = 3$ ($x = 2$ булганда).

Җавап: $y_{min} = -5$, $y_{max} = 3$.

5 нче мисал. Функция бирелгән:

$$y = f(x) \text{ булганда } f(x) = 3x^2 + x - 1.$$

Табарга: $f(-x)$, $f(2x)$, $f(x^2)$, $f(x^3)$, $f(x^2 - 2x)$.

Чишү.

$$f(-x) = 3(-x)^2 + (-x) - 1 = 3x^2 - x - 1;$$
$$f(2x) = 3(2x)^2 + (2x) - 1 = 12x^2 + 2x - 1;$$
$$f(x^2) = 3(x^2)^2 + (x^2) - 1 = 3x^4 + x^2 - 1;$$
$$f(x^3) = 3(x^3)^2 + (x^3) - 1 = 3x^6 + x^3 - 1;$$
$$f(x^2 - 2x) = 3(x^2 - 2x)^2 + (x^2 - 2x) - 1 =$$
$$= 3(x^4 - 4x^3 + 4x^2) + (x^2 - 2x) - 1 =$$
$$= 3x^4 - 12x^3 + 13x^2 - 2x - 1.$$

§23. КВАДРАТ ТИГЕЗЛӘМӘЛӘРНЕ ГРАФИК ЮЛ БЕЛӘН ЧИШҮ

Квадрат тигезләмәләр белән сез инде 7 нче сыйныф алгебра курсында очрашкан идегез, §10 та да аларны искә алдык. Исегезгә төшерәбез, $ax^2 + bx + c = 0$ рәвешендәге тигезләмә *квадрат тигезләмә* дип атала, биредә a, b, c — теләсә нинди саннар (коэффициентлар), һәм $a \neq 0$. Функцияләр һәм графиклар турында белемнәребезне кулланып, без хәзер үк, «Квадрат тигезләмәләр» темасын системалы өйрәнергә керешкәнче, кайбер квадрат тигезләмәләрне чишәргә, хәтта берничә юл белән чишәргә әзер. Әлеге юлларны бер квадрат тигезләмә мисалында карап үтәбез.

Мисал. $x^2 - 2x - 3 = 0$ тигезләмәсен чишәргә.

Чишү.

I юл. §22 тагы алгоритм буенча $y = x^2 - 2x - 3$ функциясенең графигын төзибез.

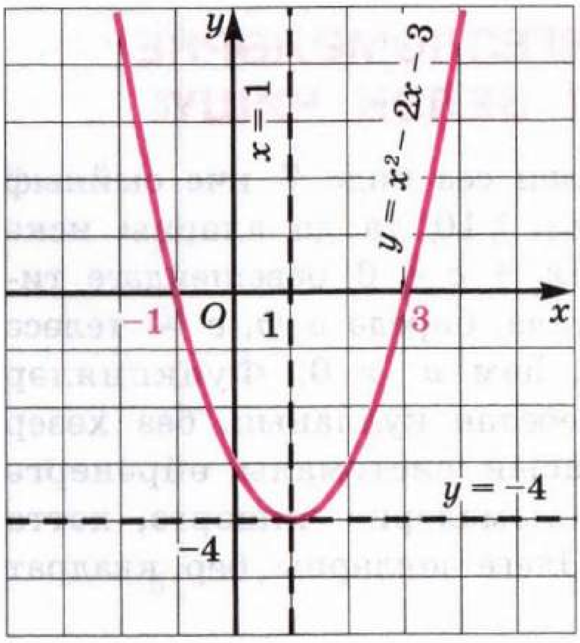
1) $a = 1$, $b = -2$, $x_0 = -\frac{b}{2a} = 1$, $y_0 = f(1) = 1^2 - 2 - 3 = -4$. Димәк, параболаның түбәсе $(1; -4)$ ноктасы, ә аның күчәре — $x = 1$ турысы.

2) x күчәрендә парабола күчәренә карата симметрияле ике нокта, мәсәлән, $x = -1$ һәм $x = 3$ ноктaларын алабыз. Табабыз: $f(-1) = f(3) = 0$. Координата яссылыгында $(-1; 0)$ һәм $(3; 0)$ нокталары төзибез.

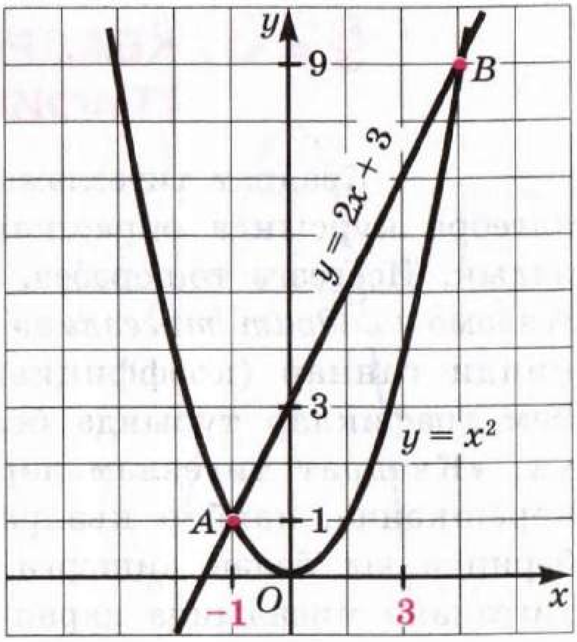
3) $(-1; 0)$, $(1; -4)$, $(3; 0)$ нокталары аша парабола үткәрәбез (рәс. 96).

$x^2 - 2x - 3 = 0$ тигезләмәсенең тамырлары булып параболаның x күчәре белән кисешү нокталары абсциссалары тора, $x_1 = -1$, $x_2 = 3$ — тигезләмәнең тамырлары.

II юл. Тигезләмәне $x^2 = 2x + 3$ рәвешенә үзгәртәбез. Бер үк координаталар системасында $y = x^2$ һәм $y = 2x + 3$ функцияләренең графикларын төзибез (рәс. 97). Алар $A(-1; 1)$ һәм $B(3; 9)$ нокталарында кисешәләр. A һәм B нокталарының абсциссалары — тигезләмәнең тамыры була, димәк, $x_1 = -1$, $x_2 = 3$.



Рәс. 96



Рәс. 97

III юл. Тигезләмәне $x^2 - 3 = 2x$ рәвешенә китерәбез. Бер үк координаталар системасында $y = x^2 - 3$ һәм $y = 2x$ функцияләренең графикларын төзибез (рәс. 98). Алар $A(-1; -2)$ һәм $B(3; 6)$ нокталарында кисешәләр. A һәм B нокталарының абсциссалары тигезләмәнең тамыры булып тора: $x_1 = -1$, $x_2 = 3$.

IV юл. Тигезләмәне бер-бер артлы үзгәртәбез:

$$x^2 - 2x + 1 - 4 = 0$$

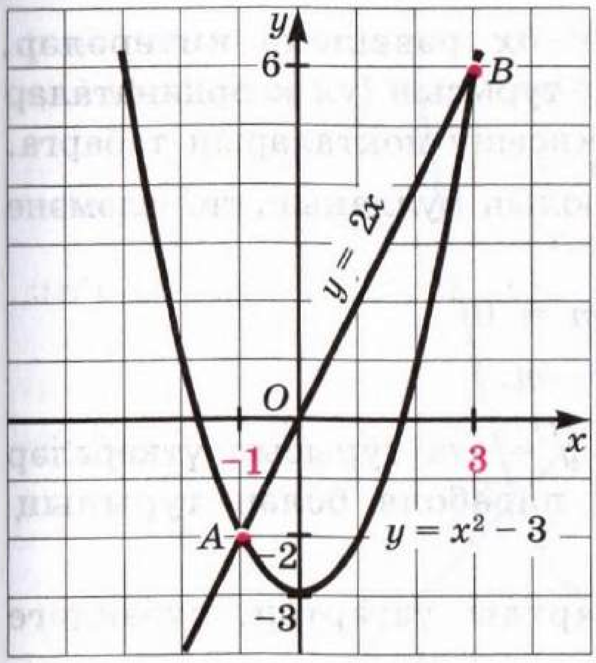
$$x^2 - 2x + 1 = 4, \text{ ягъни } (x - 1)^2 = 4.$$

Бер үк координаталар системасында $y = (x - 1)^2$ параболасын һәм $y = 4$ турысын төзибез (рәс. 99). Алар $A(-1; 4)$ һәм $B(3; 4)$ нокталарында кисешәләр. A һәм B нокталарының абсциссалары — тигезләмәнең тамырлары, шуңа күрә $x_1 = -1$, $x_2 = 3$.

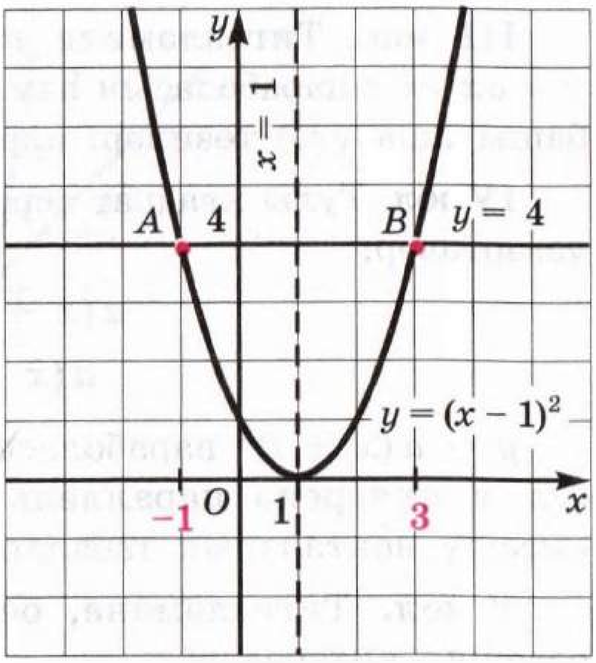
V юл. Тигезләмәнең ике ягын да буынлап x ка бүләбез:

$$x - 2 - \frac{3}{x} = 0;$$

$$x - 2 = \frac{3}{x}.$$

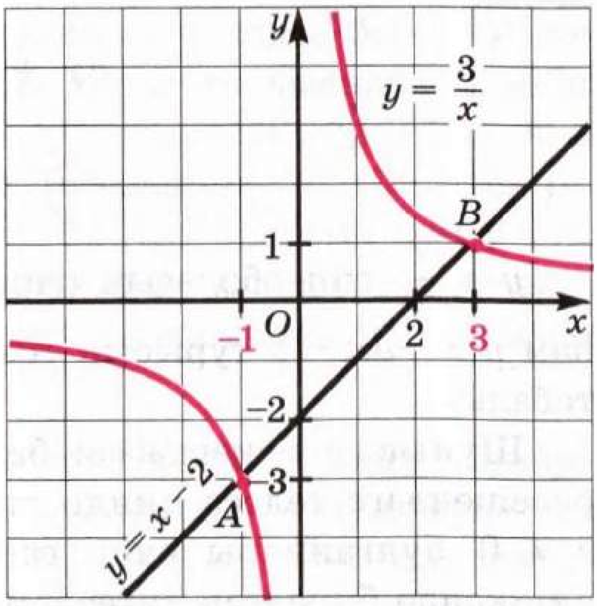


Рәс. 98



Рәс. 99

Бер үк координаталар системасында $y = \frac{3}{x}$ гиперболасын һәм $y = x - 2$ турысын төзибез (рәс. 100). Алар $A(-1; -3)$ һәм $B(3; 1)$ нокталарында кисешәләр. Тигезләмәнең тамырлары — A һәм B нокталарының абсциссалары, димәк, $x_1 = -1$, $x_2 = 3$.



Рәс. 100

Шулай итеп, $x^2 - 2x - 3 = 0$ квадрат тигезләмәсен без биш төрле график юл белән чиштек. Бу юлларның эчтәлеген аңларга тырышыйк.

I юл. $y = ax^2 + bx + c$ функциясенең графигын төзиләр һәм аның x күчәре белән кисешү нокталарын табалар.

II юл. Тигезләмәне $ax^2 = -bx - c$ рәвешенә китерәләр, $y = ax^2$ параболасын һәм $y = -bx - c$ турысын төзиләр, аларның кисешү нокталарын табалар (әгәр кисешү нокталары булса, тигезләмәнең тамырлары булып аларның абсциссалары тора).

III юл. Тигезләмәне $ax^2 + c = -bx$ рәвешенә китерәләр, $y = ax^2 + c$ параболасын һәм $y = -bx$ турысын (ул координаталар башы аша үтә) төзиләр; аларның кисешү нокталарын табарга.

IV юл. Тулы квадрат аерып алу юлын кулланып, тигезләмәне үзгәртәләр:

$$a(x + l)^2 + m = 0$$
$$a(x + l)^2 = -m.$$

$y = a(x + l)^2$ параболасын һәм $y = -m$ турысын үткәрәләр (ул x күчәренә параллель була); парабола белән турының кисешү нокталарын табалар.

V юл. Тигезләмәне, бер-бер артлы үзгәртеп, түбәндәге рәвешкә китерәләр:

$$\frac{ax^2}{x} + \frac{bx}{x} + \frac{c}{x} = \frac{0}{x},$$

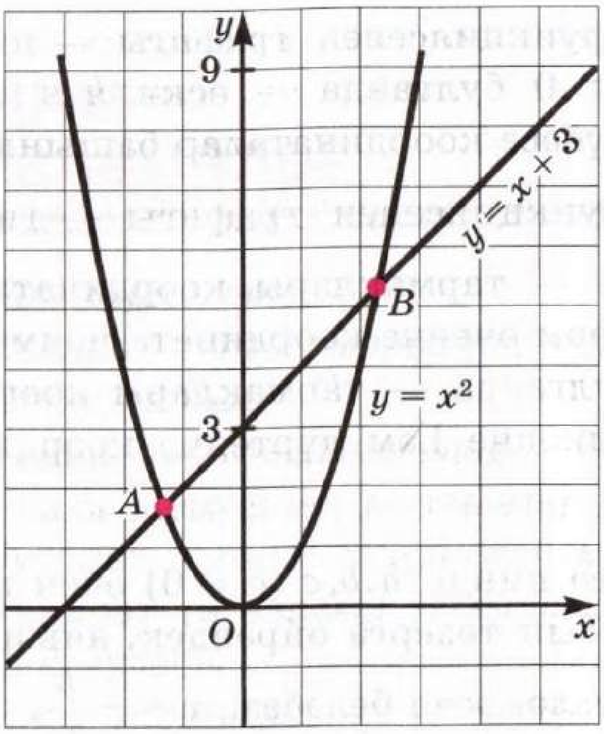
ягъни

$$ax + b + \frac{c}{x} = 0$$
$$\frac{c}{x} = -ax - b.$$

$y = \frac{c}{x}$ гиперболасын (гипербола $c \neq 0$ булганда гына төзелә) һәм $y = -ax - b$ турысын төзиләр; аларның кисешү нокталарын табалар.

Шунысын искәртәбез: беренче дүрт юлны $ax^2 + bx + c = 0$ рәвешендәге теләсә нинди тигезләмәләргә карата, ә бишенчесен $c \neq 0$ булганнары өчен генә кулланырга мөмкин. Мисаллар чишкәндә бирелгән тигезләмәгә карата иң туры килгәнен, яисә үзегезгә күбрәк ошаганын (аңлашылганын) сайлап алырга була.

Искәрмә. Квадрат тигезләмәләрне график юл белән чишү алымнары бик күп булса да, теләсә кайсы квадрат тигезләмәне шулай чишеп була дигән ышаныч юк. Әйтик, $x^2 - x - 3 = 0$ тигезләмәсен чишәргә кирәк булсын (тикшерелгән мисалга охшаганын махсус сайлап алабыз). Аны, мәсәлән, икенче юл белән чишеп карарбыз: $x^2 = x + 3$ рәвешенә китерәбез, $y = x^2$ параболасын һәм $y = x + 3$ турысын төзибез, алар A һәм B нокталарында кисешәләр (рәс. 101), димәк, тигезләмәнең ике тамыры бар. Әмма бу тамырларның нәр-



Рәс. 101

сәгә тигез икәнен без сызым ярдәмендә әйтә алмыйбыз — *A* һәм *B* нокталарының координатлары алда каралган мисалдагы кебек «әйбәт» түгел. Ә хәзер $x^2 - 16x - 95 = 0$ тигезләмәсен карыйбыз. Аны, мәсәлән, өченче юл белән чишәбез. Тигезләмәне $x^2 - 95 = 16x$ *рәвешенә китерәбез. Биредә исә* $y = x^2 - 95$ параболасын һәм $y = 16x$ турысын төзергә кирәк. Ләкин дәфтәр битендә мондый зур үлчәмле төзүләр эшләп булмый, мәсәлән, $y = x^2$ параболасын 95 шакмакка аска төшерергә кирәк була.

Шулай итеп, квадрат тигезләмәне график чишү юллары матур да, аңлаешлы да, әмма теләсә кайсы тигезләмәне йөз процент дөрес чишеп була дигән ышаныч юк. Йөз процентлы ышанычны квадрат тигезләмәләр чишүнең математиклар уйлап тапкан алгоритмы гына бирә ала. Без бу турыда киләсе бүлектә сөйләшербез.

ТӨП НӘТИҖӘЛӘР

Бу бүлектә без графикларны төзи белә торган функцияләр запасын шактый тулыландырдык. Хәзер без $y = kx^2$, $y = \frac{k}{x}$ функцияләрен теләсә нинди $k \neq 0$ коэффициенты өчен күз алдына китерә алабыз:

$y = kx^2$ функциясенең графигы — парабола (тармаклары $k > 0$ булганда — өскә, $k < 0$ булганда аска юнәлә; түбәсе координаталар башында);

$y = \frac{k}{x}$ функциясенең графигы — гипербола: $k > 0$ булганда — тармаклары координата яссылыгының беренче һәм өченче координата почмакларында; $k < 0$ булганда — тармаклары координата яссылыгының икенче һәм дүртенче координата почмакларында.

Без теләсә нинди a, b, c ($a \neq 0$) өчен $y = ax^2 + bx + c$ параболасын төзергә өйрәндек, аның симметрия күчәре тигезләмәсен беләбез: $x = -\frac{b}{2a}$.

Без, $y = f(x)$ функциясенең графигыннан чыгып, түбәндәге функцияләрнең графикларын төзергә өйрәндек:

$$y = f(x + l), \quad y = f(x) + m, \quad y = f(x + l) + m.$$

Без, функциянең аның графигын укуга кертелә торган ике яңа <u>үзлеген</u> өйрәндек:
функциянең астан чикләнүе;
функциянең өстән чикләнүе.

4 БҮЛЕК КВАДРАТ ТИГЕЗЛӘМӘЛӘР

§ 24. *Төп төшенчәләр*
§ 25. *Квадрат тигезләмәләрнең тамырлары формулалары*
§ 26. *Рациональ тигезләмәләр*
§ 27. *Реаль хәлләрнең математик модельләре буларак, рациональ тигезләмәләр*
§ 28. *Квадрат тигезләмә тамырларының тагын бер формуласы*
§ 29. *Виет теоремасы*
§ 30*. *Иррациональ тигезләмәләр*

§24. ТӨП ТӨШЕНЧӘЛӘР

Квадрат тигезләмәләр белән инде берничә тапкыр очрашкан идек, менә шушы бүлектә без аларны җентекләбрәк өйрәнербез.

квадрат тигезләмә

китерелгән квадрат тигезләмә

китерелмәгән квадрат тигезләмә

квадрат өчбуын

Билгеләмә 1. **Квадрат тигезләмәләр** дип

$$ax^2 + bx + c = 0$$

рәвешендәге тигезләмәләрне атыйлар, биредә a, b, c коэффициентлары — теләсә нинди реаль саннар һәм $a \neq 0$. ax^2+bx+c күпбуынын **квадрат өчбуын** дип атыйлар.

a, b, c коэффициентларын исемнәре буенча аерып йөртәләр: a — *беренче*, яки *өлкән коэффициент*; b — *икенче коэффициент*, яки x алдындагы *коэффициент*; c — *ирекле буын*.

Билгеләмә 1. Әгәр өлкән коэффициент 1 гә тигез булса, квадрат тигезләмә **китерелгән** дип атала; әгәр өлкән коэффициент 1 гә тигез булмаса, **китерелмәгән** дип атала.

сүзлекчә

тулы квадрат тигезләмә

тулы булмаган квадрат тигезләмә

квадрат тигезләмәнең тамыры

Әйтик,

$$2x^2 - 5x + 3 = 0$$

тигезләмәсе — китерелмәгән квадрат тигезләмә (өлкән коэффициенты 2 гә тигез), ә инде

$$x^2 + 3x - 4 = 0$$

тигезләмәсе — китерелгән квадрат тигезләмә.

Китерелгән һәм китерелмәгән квадрат тигезләмәләрдән тыш, тулы һәм тулы булмаган тигезләмәләрне аерып йөртәләр.

Билгеләмә 3. **Тулы квадрат тигезләмә** — барлык өч кушылучысы да булган квадрат тигезләмә; башкача әйтсәк, b һәм c коэффициентлары нульгә тигез булмаган тигезләмә. **Тулы булмаган квадрат тигезләмә** — өч кушылучының кайберсе булмаган тигезләмә; башкача әйтсәк, b һәм c коэффициентларының кимендә берсе нульгә тигез булган тигезләмә.

Игътибар итегез: ax^2 турында сүз дә алып барылмый, квадрат тигезләмәдә бу буын һәрвакыт булырга тиеш.

Билгеләмә 4. $ax^2 + bx + c = 0$ **квадрат тигезләмәсенең тамыры** дип x үзгәрешлесенең $ax^2 + bx + c$ квадрат өчбуынын нульгә әйләндерә торган теләсә нинди кыйммәтен атыйлар; x үзгәрешлесенең мондый кыйммәтен **квадрат өчбуынның тамыры** дип тә атыйлар.

Болай дип тә әйтеп була: $ax^2 + bx + c = 0$ квадрат тигезләмәсенең тамыры — x ның, тигезләмәгә куйгач, аны $0 = 0$ тигезлегенә әйләндерә торган кыйммәте ул.

Квадрат тигезләмәне чишү — аның барлык тамырларын табу яки тамырлары булмавын ачыклау дигән сүз.

Башта тулы булмаган квадрат тигезләмәләрне чишәргә өйрәнербез, чөнки моның өчен әллә нәрсәләр уйлап табасы юк. Берничә шундый тигезләмәне карарбыз.

1 нче мисал. Тулы булмаган квадрат тигезләмәне чишәргә:

а) $2x^2 - 7x = 0$; в) $x^2 - 16 = 0$; д) $3x^2 + 10 = 0$;

б) $-x^2 + 5x = 0$; г) $-2x^2 + 7 = 0$; е) $5x^2 = 0$.

Чишү. *а*) Чишәбез:

$$2x^2 - 7x = 0; \quad x(2x - 7) = 0.$$

Шунлыктан йә $x = 0$, йә $2x - 7 = 0$ һәм моннан $x = 3{,}5$. Шулай итеп, тигезләмәнең ике тамыры бар: $x_1 = 0$, $x_2 = 3{,}5$.

б) Чишәбез:

$$-x^2 + 5x = 0; \quad -x(x - 5) = 0.$$

Тигезләмәнең ике тамыры бар: $x_1 = 0$, $x_2 = 5$.

в) Чишәбез:

$$x^2 - 16 = 0; \quad x^2 = 16.$$

§ 10 параграфта без $x^2 = a$ (биредә $a > 0$) рәвешендәге тигезләмәнең $\sqrt{a}$ һәм $-\sqrt{a}$ га тигез булган ике тамыры барлыгы турында сөйләшкән идек. Димәк, $x^2 = 16$ тигезләмәсе өчен: $x_1 = 4$ һәм $x_2 = -4$ (без $\sqrt{16} = 4$ икәнен исәпкә алдык).

Кулайрак язылышны да кулланалар: $x_{1,2} = \pm 4$.

г) $-2x^2 + 7 = 0$; $2x^2 = 7$; $x^2 = 3{,}5$.

Тигезләмәнең ике тамыры бар: $x_1 = \sqrt{3{,}5}$, $x_2 = -\sqrt{3{,}5}$. Бу очракта да кыскарак язарга мөмкин: $x_{1,2} = \pm\sqrt{3{,}5}$.

д) $3x^2 + 10 = 0$; $3x^2 = -10$.

$3x^2$ аңлатмасы x ның теләсә нинди кыйммәтләрендә дә тискәре булмаганлыктан, $3x^2 = -10$ тигезләмәсенең тамырлары юк. Башкача әйтсәк, x үзгәрешлесе урынына бу тигезләмәгә куйганнан соң, аны дөрес санлы тигезлеккә әйләндерә торган бер генә сан да юк.

Кайвакыт мондый очракларда *реаль* тамырлары юк дип тә әйтәләр. Чөнки математикада, реаль саннардан тыш, уйланма дип аталучы саннар да карала; бу тигезләмәнең *уйланма* тамырлары бар.

е) Әгәр $5x^2 = 0$ булса, $x^2 = 0$, моннан $x = 0$ — тигезләмәнең бердәнбер тамыры. ▣

Бу мисалда тулы булмаган квадрат тигезләмәләрнең ничек чишелүен күрдек. Кайбер нәтиҗәләр ясыйбыз.

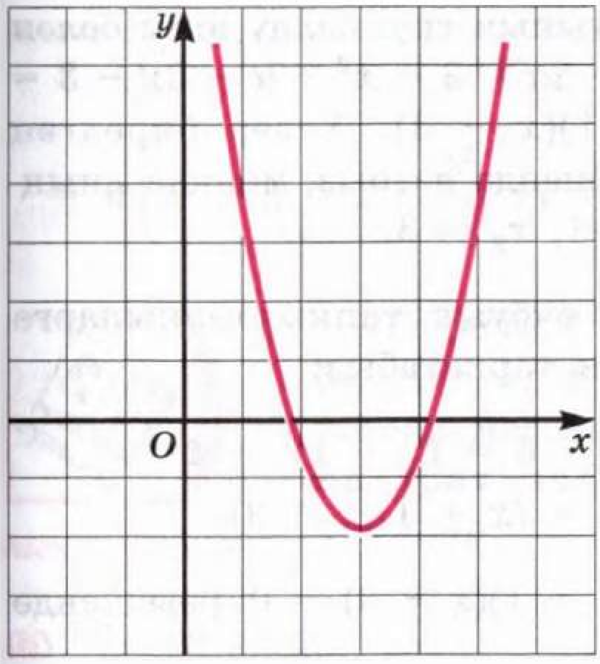
1. Әгәр тигезләмә $ax^2 = 0$ рәвешендә булса, аның бер тамыры бар: $x = 0$.

2. Әгәр тигезләмә $ax^2 + bx = 0$ рәвешендә булса, тапкырлаучыларга таркату алымын кулланабыз: $x(ax + b) = 0$; димәк, йә $x = 0$, йә $ax + b = 0$. Нәтиҗәдә ике тамыр табыла: $x_1 = 0$, $x_2 = -\frac{b}{a}$.

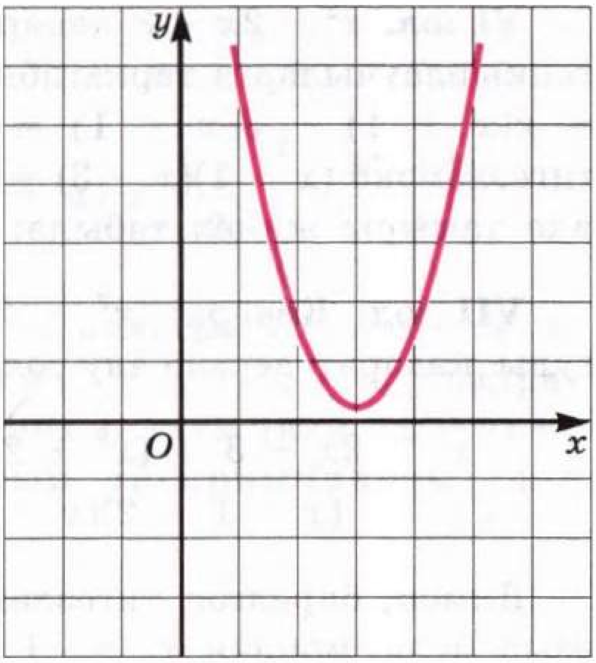
3. Әгәр тигезләмә $ax^2 + c = 0$ рәвешендә булса, аны $ax^2 = -c$ һәм $x^2 = -\frac{c}{a}$ итеп үзгәртәбез. Әгәр $-\frac{c}{a}$ — тискәре сан булса, $x^2 = -\frac{c}{a}$ рәвешендәге тигезләмәнең тамырлары булмый (димәк, башлангыч $ax^2 + c = 0$ тигезләмәсенең дә тамырлары булмый). Әгәр $-\frac{c}{a}$ — уңай сан, ягъни $-\frac{c}{a} = m$ булса (биредә $m > 0$), $x^2 = m$ тигезләмәсенең ике тамыры була: $x_1 = \sqrt{m}$, $x_2 = -\sqrt{m}$ (алда әйткәнебезчә, бу очракта кыскарак язылыш: $x_{1,2} = \pm\sqrt{m}$).

Тулы булмаган квадрат тигезләмәнең ике тамыры, бер тамыры була алуын, бер тамыры да булмый калуын белдек. Тулы квадрат тигезләмә турында да шуны ук әйтергә мөмкин. Ни өчен?

Без инде беләбез, $y = ax^2 + bx + c$ функциясенең графигы парабола була, $ax^2 + bx + c = 0$ квадрат тигезләмәсенең тамырлары булып $y = ax^2 + bx + c$ параболасы белән x күчәре кисешкән нокталарның абсциссалары тора. Парабола x күчәрен ике ноктада кисеп үтәргә мөмкин, x күчәренә орынырга, ягъни аның белән бер генә уртак ноктасы булырга мөмкин; x күчәре белән гомумән кисешмәскә дә мөмкин (рәс. 102, *а*, *б*, *в*). Димәк, $ax^2 + bx + c = 0$ ***квадрат тигезләмәсенең йә ике тамыры, йә бер тамыры булырга, йә бөтенләй тамырлары булмаска мөмкин.***

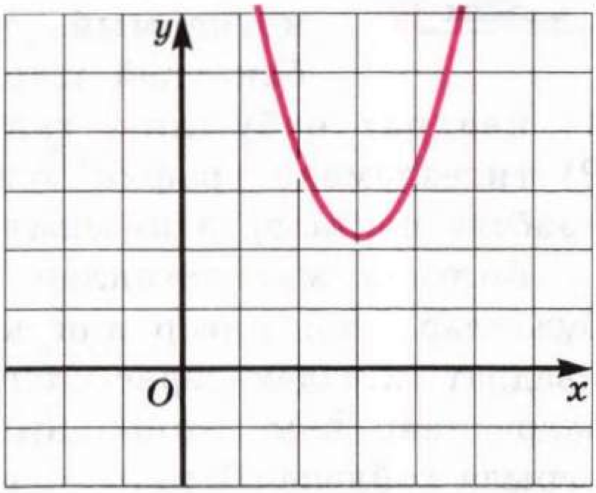


Рәс. 102, *а*



Рәс. 102, *б*

Киләсе параграфта без бу раслауның геометрик сурәткә нигезләнмәгән исбатлавын китербез.



Рәс. 102, *в*

Билгеле инде, квадрат тигезләмәнең тамыры булуын белү начар түгел, ә бу тамырларны таба белү тагын да яхшырак. Әгәр тигезләмә тулы булмаса, аерым кыенлыклар юклыгын инде күреп уздык. Әгәр тулы квадрат тигезләмә булса? Хәзер караласы мәсьәләдә без әлегә кадәр квадрат тигезләмә очрагында нинди алымнар кулланганыбызны искә төшерербез.

2 нче мисал. $x^2 - 2x - 3 = 0$ тигезләмәсен чишәргә.

Чишү. Узган параграфта без бу тигезләмәне биш төрле график юл белән чиштек. Әлеге тигезләмәне чишүнең тагын ике юлын — тапкырлаучыларга таркату ярдәмендә чишүне карап узыйк.

VI юл. $x^2 - 2x - 3$ квадрат өчбуынын группалау юлы белән тапкырлаучыларга таркатабыз: $x^2 - 2x - 3 = x^2 + x - 3x - 3 = x(x + 1) - 3(x + 1) = (x + 1)(x - 3)$. Хәзер бирелгән тигезләмәне $(x + 1)(x - 3) = 0$ рәвешендә язабыз, моннан аның ике тамыры җиңел табыла: $x_1 = -1$, $x_2 = 3$.

VII юл. Квадрат $x^2 - 2x - 3$ өчбуын тапкырлаучыларга тулы квадрат аерып алу юлы белән таркатабыз:

$$x^2 - 2x - 3 = (x^2 - 2x + 1) - 4 = (x - 1)^2 - 4 =$$
$$= (x - 1 + 2)(x - 1 - 2) = (x + 1)(x - 3).$$

Димәк, бирелгән тигезләмәне $(x + 1)(x - 3) = 0$ рәвешендә язып була, моннан $x_1 = -1$, $x_2 = 3$.

Шулай итеп, без $x^2 - 2x - 3 = 0$ тигезләмәсен җиде юл белән чиштек. Шулай да, бу юлларны белү безне берьюлы бөтен бәлаләрдән коткармый. Чөнки квадрат тигезләмәләр ике бик уңай шарт үтәлгәндә генә җиңел чишелде: 1) квадрат өчбуынны тапкырлаучыларга таркатып була; 2) тигезләмәне график юллар белән чишкәндә, графиклар «әйбәт» нокталарда кисеште.

Билгеле, математиклар язмыш аларга һәрвакыт шундый бүләкләр ясап торыр дип ышанмаганнар. Алар теләсә нинди квадрат тигезләмәләрне чишү өчен дә яраклы универсаль алым эзләгәннәр һәм тапканнар да; алдагы параграфта без шул турыда сөйләшербез.

§ 25. КВАДРАТ ТИГЕЗЛӘМӘЛӘРНЕҢ ТАМЫРЛАРЫ ФОРМУЛАЛАРЫ

$ax^2 + bx + c = 0$ квадрат тигезләмәсе бирелгән. $ax^2 + bx + c$ квадрат өчбуынына карата § 22 та, $y = ax^2 + bx + c$ функциясенең графигы парабола икәнлеген исбатлаганда, кулланган рәвешүзгәртүләрне эшлибез:

$$ax^2 + bx + c = (ax^2 + bx) + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c =$$

$$= a\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \frac{b^2}{4a} + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

дискриминант

Гадәттә, $b^2 - 4ac$ аңлатмасын D хәрефе белән билгелиләр һәм аны $ax^2 + bx + c = 0$ **квадрат тигезләмәсенең дискриминанты** (яки $ax^2 + bx + c$ **квадрат өчбуынының дискриминанты**) дип атыйлар.

Шулай итеп,

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a}.$$

Димәк, $ax^2 + bx + c = 0$ квадрат тигезләмәсен түбәндәге рәвешкә китерергә мөмкин:

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{D}{4a}$$

һәм

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{D}{4a^2}. \qquad (1)$$

Теләсә нинди квадрат тигезләмәне (1) рәвешенә китерергә мөмкин, һәм ул квадрат тигезләмәнең тамырлары санын белү һәм бу тамырларны табу өчен бик уңай.

Теорема 1 *Әгәр $D < 0$ булса, $ax^2 + bx + c = 0$ квадрат тигезләмәсенең тамырлары булмый.*

Исбатлау. Әгәр $D < 0$ булса, (1) тигезләмә уң ягы — тискәре сан; шул ук вакытта (1) тигезләмәсенең сул ягы — x ның теләсә нинди кыйммәтләрендә тискәре булмаган кыйммәтләр ала. Димәк, x ның (1) тигезләмәсен канәгатьләндерә торган бер генә кыйммәте дә юк, шуңа күрә (1) тигезләмәнең тамырлары булмый.

1 нче мисал. $2x^2 + 4x + 7 = 0$ тигезләмәсен чишәргә.
Чишү. Биредә $a = 2$, $b = 4$, $c = 7$,

$$D = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \cdot 2 \cdot 7 = 16 - 56 = -40.$$

$D < 0$ булганлыктан, 1 нче теорема буенча бирелгән квадрат тигезләмәнең тамырлары булмый.

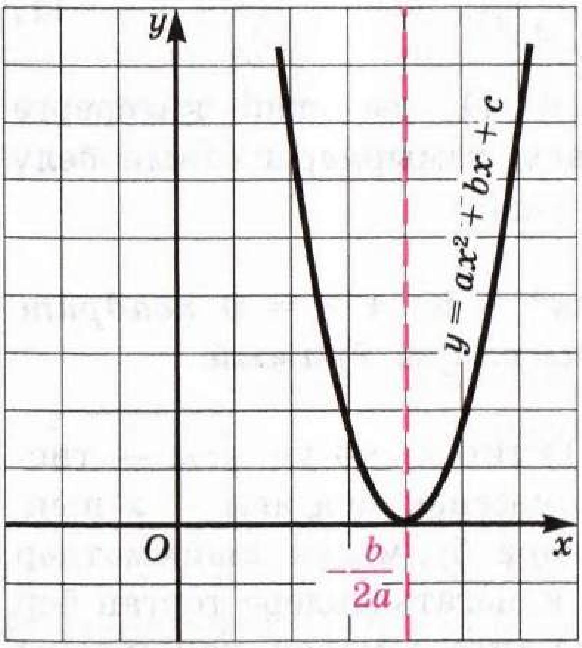
Теорема 2 ***Әгәр $D = 0$ булса, $ax^2 + bx + c = 0$ квадрат тигезләмәсенең бер тамыры бар һәм ул $x = -\frac{b}{2a}$ формуласы буенча табыла.***

Исбатлау. Әгәр $D = 0$ булса, (1) тигезләмә $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0$ рәвешен ала. Димәк, $x + \frac{b}{2a} = 0$, ягъни $x = -\frac{b}{2a}$ — тигезләмәнең бердәнбер тамыры.

Искәрмә 1. Сез хәтерлисезме, $x = -\frac{b}{2a}$ — $y = ax^2 + bx + c$ функциясенең графигы булып торучы парабола түбәсенең абсциссасы иде? Ни өчен нәкъ менә шушы кыйммәт $ax^2 + bx + c = 0$ квадрат тигезләмәсенең бердәнбер тамыры булып чыкты? Барысы да бик гади: әгәр $D = 0$ икән, без алда билгеләгәнчә,

$$y = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a} = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2.$$

Ә инде $y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ функциясенең графигы булып, түбәсе $\left(-\frac{b}{2a}; 0\right)$ ноктасында урнашкан парабола тора (мәсәлән, 103 нче рәсемне кара). Димәк, $D = 0$ очрагында парабола түбәсенең абсциссасы һәм квадрат тигезләмәнең тамыры — бер үк сан.



Рәс. 103

2 нче мисал $4x^2 - 20x + 25 = 0$ тигезләмәсен чишәргә.

Чишү. Биредә $a = 4$, $b = -20$, $c = 25$, $D = b^2 - 4ac = (-20)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 25 = 400 - 400 = 0$.

$D = 0$ булганлыктан, 2 нче теорема буенча бирелгән квадрат тигезләмәнең бер тамыры бар. Бу тамыр $x = -\frac{b}{2a}$ формуласы буенча табыла. Димәк, $x = \frac{20}{2 \cdot 4} = 2{,}5$.

Җавап: 2,5.

Искәрмә 2. $4x^2 - 20x + 25$ нең тулы квадрат булуына игътибар итегез: $4x^2 - 20x + 25 = (2x - 5)^2$. Әгәр моны башта ук искәргән булсак, тигезләмәне болай чишәр идек: $(2x - 5)^2 = 0$, димәк, $2x - 5 = 0$, моннан $x = 2{,}5$. Гомумән, $D = 0$ булса, $ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ — без моны 1 нче искәрмәдә исбатлаган идек.

Теорема 3

Әгәр $D > 0$ булса, $ax^2 + bx + c = 0$ квадрат тигезләмәсенең ике тамыры була һәм алар түбәндәге формулалар буенча табыла:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}, \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}.$$

Исбатлау. $ax^2 + bx + c = 0$ квадрат тигезләмәсен (1) рәвешендә язабыз:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{D}{4a^2}.$$

$x + \frac{b}{2a} = t$ дип алсак, (1) тигезләмә болай языла:

$$t^2 = \frac{D}{4a^2}. \qquad (2)$$

Шарт буенча $D > 0$, димәк, тигезләмәнең уң ягы — уңай сан. Ул чагында (2) тигезләмәдән табабыз:

$$t = \pm\frac{\sqrt{D}}{2a}.$$

Ләкин $t = x + \frac{b}{2a}$, шулай итеп, мәсьәлә ике тигезләмәне чишүгә кайтып кала:

$$x + \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{D}}{2a}; \qquad x + \frac{b}{2a} = -\frac{\sqrt{D}}{2a}.$$

Беренче тигезләмәдән табабыз:

$$x = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{D}}{2a} = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}.$$

Икенче тигезләмәдән табабыз:

$$x = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{D}}{2a} = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}.$$

исегездә калдырыгыз

Шулай итеп, бирелгән квадрат тигезләмәнең ике тамыры бар:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}, \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}. \qquad (3)$$

Искәрмә 3. Математикада яңа кертелгән атаманың тормыштан алынган ниндидер мәгънәгә туры килми калган очрагы бик сирәк була. Яңа төшенчә — дискриминантны алыйк. «Дискриминация» сүзенең нәрсәне аңлатуын беләсездер. Ул бераүләрне кимсетү, ә икенче бераүләрне күккә чөюне аңлата, ягъни төрле кешеләргә төрлечә караш. Ике сүз дә (дискриминант та, дискриминация дә) латинча *discriminans* — аеручы, төрләргә бүлүче сүзеннән килеп чыккан. Дискриминант квадрат тигезләмәләрне тамырлары саны буенча төрләргә бүлә.

3 нче мисал. $3x^2 + 8x - 11 = 0$ тигезләмәсен чишәргә.

Чишү. Биредә $a = 3$, $b = 8$, $c = -11$,

$$D = b^2 - 4ac = 8^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-11) = 64 + 132 = 196.$$

$D > 0$ булганлыктан, 3 нче теорема буенча бирелгән квадрат тигезләмәнең ике тамыры бар. Бу тамырлар (3) формулалар буенча табыла:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-8 + \sqrt{196}}{2 \cdot 3} = \frac{-8 + 14}{6} = 1;$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{-8 - \sqrt{196}}{2 \cdot 3} = \frac{-8 - 14}{6} = -\frac{11}{3} = -3\frac{2}{3}.$$

Җавап: 1; $-3\frac{2}{3}$.

Чынлыкта без түбәндәге алгоритмны эшләдек.

$ax^2 + bx + c = 0$
тигезләмәсен чишү алгоритмы

1. Дискриминант D ны $D = b^2 - 4ac$ формуласы буенча исәпләргә.
2. Әгәр $D<0$ булса, квадрат тигезләмәнең тамырлары юк.
3. Әгәр $D=0$ булса, квадрат тигезләмәнең бер тамыры бар:

$$x = -\frac{b}{2a}.$$

4. Әгәр $D>0$ булса, квадрат тигезләмәнең ике тамыры бар:

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}.$$

Бу алгоритм — универсаль, аны тулы квадрат тигезләмәләргә дә, тулы булмаганнарга да кулланып була. Ләкин тулы булмаган квадрат тигезләмәләрне без алдагы параграфта эшләгән алымнар белән чишү уңайрак.

4 нче мисал. Тигезләмәне чишәргә:

а) $x^2+3x-5=0$; б) $-9x^2+6x-1=0$; в) $2x^2-x+3,5=0$.

Чишү. *а*) Биредә $a = 1$, $b = 3$, $c = -5$,

$$D = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-5) = 9 + 20 = 29.$$

$D>0$ булганлыктан, бирелгән квадрат тигезләмәнең ике тамыры бар. Бу тамырларны (3) формулалар буенча табабыз:

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} = \frac{-3+\sqrt{29}}{2}, \qquad x_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} = \frac{-3-\sqrt{29}}{2}.$$

б) Тәҗрибә күрсәткәнчә, өлкән коэффициенты уңай булган квадрат тигезләмәләр белән эш итү уңайрак. Шуңа күрә башта тигезләмәнең ике ягын да -1 гә тапкырлыйбыз: $9x^2 - 6x + 1 = 0$.

Биредә $a = 9$, $b = -6$, $c = 1$, $D = b^2 - 4ac = 36 - 36 = 0$. $D = 0$ булганлыктан, бу квадрат тигезләмәнең бер тамыры бар. Ул $x = -\frac{b}{2a}$ формуласы буенча табыла. Димәк, $x = \frac{6}{2 \cdot 9} = \frac{1}{3}$.

Әлеге тигезләмәне башкача да чишеп була иде: $9x^2 - 6x + 1 = (3x - 1)^2$ булганлыктан, $(3x - 1)^2 = 0$ тигезләмәсен табабыз, моннан: $3x - 1 = 0$; $x = \frac{1}{3}$.

в) Биредә $a = 2$, $b = -1$, $c = 3{,}5$, $D = b^2 - 4ac = 1 - 4 \cdot 2 \cdot 3{,}5 = 1 - 28 = -27$. $D < 0$ булганлыктан, бирелгән квадрат тигезләмәнең тамырлары булмый.

Математиклар кыскалык ярата. Ни өчен квадрат тигезләмәләр чишүнең шундый озын кагыйдәсен кулланырга, диләр алар, гомуми формуланы гына язып чишү уңайрак бит:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \tag{4}$$

Әгәр дискриминант $D = b^2 - 4ac$ — тискәре сан булып чыкса, язылган формуланың мәгънәсе юк (квадрат тамыр тамгасы астында тискәре сан тора), димәк, тамырлар булмый. Әгәр инде дискриминант нульгә тигез була икән, $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{0}}{2a} = -\frac{b}{2a}$, ягъни бер тамыр табабыз (бу очракта квадрат тигезләмә бер үк төрле ике тамырга ия, дип тә әйтәләр: $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$). Ниһаять, әгәр $b^2 - 4ac > 0$ булып чыкса, ике тамыр: x_1 һәм x_2 табылыр, алар шул ук (3) формулалар яки (4) формула буенча исәпләнә.

$\sqrt{b^2 - 4ac}$ саны үзе бу очракта — уңай сан (уңай саннан квадрат тамыр кебек үк), ә аның алдындагы ике тамга беренче очракта (x_1 не тапканда) — бу уңай сан $-b$ га кушыла, ә икенче очракта (x_2не тапканда) бу уңай сан $-b$ саныннан алына икәнлеген күрсәтә.

Сезнең сайлау мөмкинлегегез бар. Теләсәгез — квадрат тигезләмәне төзелгән алгоритм нигезендә җентекле итеп чишегез, теләсәгез — (4) формуласы язып куегыз һәм нәтиҗәләрне аның ярдәмендә ясагыз.

5 нче мисал. Тигезләмәне чишегез:

а) $\frac{2}{3}x^2 + \frac{5}{6}x - \frac{7}{12} = 0$; б) $3x^2 - 0{,}2x + 2{,}77 = 0$.

Чишү. а) Билгеле, (4) яки (3) формулаларны кулланырга мөмкин, бу очракта $a = \frac{2}{3}$, $b = \frac{5}{6}$, $c = -\frac{7}{12}$. Тик нигә вакланмалар белән эш итәргә, бөтен саннар белән исәпләү күпкә җиңелрәк һәм уңайлырак бит? Әйдәгез, ваклаучылардан котылабыз. Моның өчен тигезләмәнең ике ягын да 12 гә, ягъни тигезләмә коэффициентлары булып торучы вакланмаларның иң кечкенә уртак ваклаучысына тапкырларга кирәк. Табабыз:

$$12\left(\frac{2}{3}x^2 + \frac{5}{6}x - \frac{7}{12}\right) = 12 \cdot 0;$$

$$8x^2 + 10x - 7 = 0.$$

Ә хәзер (4) формуласын кулланабыз:

$$x_{1,2} = \frac{-10 \pm \sqrt{10^2 - 4 \cdot 8 \cdot (-7)}}{2 \cdot 8};$$

$$x_{1,2} = \frac{-10 \pm \sqrt{100 + 224}}{16} = \frac{-10 \pm \sqrt{324}}{16} = \frac{-10 \pm 18}{16}.$$

Димәк, $x_1 = \frac{-10 + 18}{16} = \frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{-10 - 18}{16} = -\frac{7}{4}$.

б) Без тагын вакланмалы коэффициентлар кергән тигезләмәгә юлыктык: $a = 3$, $b = -0{,}2$, $c = 2{,}77$. Тигезләмәнең ике ягын да 100 гә тапкырлыйбыз һәм бөтен коэффициентлы тигезләмә табабыз:

$$300x^2 - 20x + 277 = 0.$$

Хәзер (4) формуладан файдаланабыз:

$$x_{1,2} = \frac{20 \pm \sqrt{20^2 - 4 \cdot 300 \cdot 277}}{2 \cdot 300}.$$

Чама белән генә дә дискриминантның (тамырасты аңлатмасының) — тискәре сан икәнен күреп була. Димәк, тигезләмәнең тамырлары юк. ▣

6 нчы мисал. $5x^2-2\sqrt{15}\,x+1=0$ тигезләмәсен чишәргә.

Чишү. Алдагы мисалдан аермалы буларак, биредә кыскача (4) формуласыннан түгел, ә алгоритмнан файдалану отышлырак. Табабыз: $a = 5$, $b = -2\sqrt{15}$, $c = 1$, $D = b^2 - 4ac = \left(-2\sqrt{15}\right)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 1 = 60 - 20 = 40$. $D > 0$ булганлыктан, квадрат тигезләмәнең ике тамыры бар, аларны (3) формулалар буенча табабыз:

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} = \frac{2\sqrt{15}+\sqrt{40}}{2\cdot 5} = \frac{2\sqrt{15}+2\sqrt{10}}{10} =$$

$$= \frac{2\sqrt{5}\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}{10} = \frac{\sqrt{5}\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}{5};$$

$$x_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} = \frac{2\sqrt{15}-\sqrt{40}}{10} = \frac{\sqrt{5}\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}{5}.$$

7 нче мисал. Тигезләмәне чишәргә:

$$x^2 - (2p+1)x + (p^2 + p - 2) = 0.$$

параметр

параметрлы тигезләмә

Чишү. Бу квадрат тигезләмәнең әлегә кадәр тикшерелгән барлык квадрат тигезләмәләрдән аермасы шул: биредә коэффициентлар булып саннар түгел, ә хәрефле аңлатмалар тора. Мондый тигезләмәләрне хәрефле коэффициентлы тигезләмәләр яки *параметрлы тигезләмәләр* дип йөртәләр. Бу очракта p параметры (хәрефе) икенче коэффициент һәм ирекле буын составына керә.

Дискриминантны табабыз:

$$D = (2p+1)^2 - 4\cdot 1\cdot(p^2+p-2) = (4p^2+4p+1)-(4p^2+4p-8) = 9.$$

Моннан,

$$x_1 = \frac{(2p+1)+\sqrt{9}}{2} = \frac{2p+1+3}{2} = \frac{2(p+2)}{2} = p+2;$$

$$x_2 = \frac{(2p+1)-\sqrt{9}}{2} = \frac{2p+1-3}{2} = \frac{2(p-1)}{2} = p-1.$$

8 нче мисал. Тигезләмәне чишәргә:

$$px^2 + (1 - p)x - 1 = 0.$$

Чишү. Бу тигезләмәгә дә p параметры кергән, әмма алдагы мисалдан аермалы буларак, аны (4) һәм (3) формулалар буенча чишә башларга ярамый Бу формулалар *квадрат тигезләмәгә* карата кулланыла, ә бирелгән тигезләмә турында хәзергә моны әйтеп булмый. Чынлап та, әгәр $p = 0$ булса? Ул чагында

$$0 \cdot x^2 + (1 - 0)x - 1 = 0,$$

ягъни $x - 1 = 0$, моннан $x = 1$. Ә инде $p \neq 0$ икәне төгәл билгеле булса, квадрат тигезләмә тамырлары формулаларын кулланырга мөмкин:

$$x_{1,2} = \frac{-(1-p) \pm \sqrt{(1-p)^2 - 4 \cdot p \cdot (-1)}}{2p} = \frac{p - 1 \pm \sqrt{1 - 2p + p^2 + 4p}}{2p} =$$

$$= \frac{p - 1 \pm \sqrt{(p+1)^2}}{2p} = \frac{p - 1 \pm (p+1)}{2p}.$$

Искәртәбез, әгәр $p = -1$ булса, дискриминант нульгә тигез һәм $x_1 = x_2 = 1$. Әгәр $p \neq -1$ булса,

$$x_1 = \frac{p - 1 + (p+1)}{2p} = \frac{2p}{2p} = 1, \qquad x_2 = \frac{p - 1 - (p+1)}{2p} = \frac{-2}{2p} = -\frac{1}{p}.$$

Җавап: әгәр $p = 0$ яки $p = -1$ булса, $x = 1$; әгәр $p \neq 0$ һәм $p \neq -1$ булса, $x_1 = 1$, $x_2 = -\frac{1}{p}$.

§26. РАЦИОНАЛЬ ТИГЕЗЛӘМӘЛӘР

1. Рациональ тигезләмәне чишү алгоритмы

«Рациональ тигезләмә» аңлатмасын без әлегрәк, § 7 та керткән идек. Башта *бер үзгәрешлеле рациональ аңлатманың* нәрсә икәнен искә төшерик Бу — саннардан һәм үзгәрешледән кушу, алу, тапкырлау, бүлү һәм бөтен күрсәткечле дәрәҗәгә күтәрү операцияләре ярдәмендә төзелгән алгебраик аңлатма. Әгәр $r(x)$ — рациональ аңлатма булса, $r(x) = 0$ тигезләмәсен **рациональ тигезләмә** дип атыйлар.

рациональ аңлатма

рациональ тигезләмә

Шулай да практикада «рациональ тигезләмә» атамасын тагын да киңрәк куллану уңайрак: бу — $h(x) = q(x)$ (биредә $h(x)$ һәм $q(x)$ аңлатмалар) рәвешендәге тигезләмә.

Хәзергә кадәр без теләсә нинди «рациональ тигезләмәне» чишә алмый идек: төрле рәвешүзгәртүләрдән соң сызыкча тигезләмәгә китерелә торганнарын гына чишә беләбез. Хәзер исә мөмкинлекләребез киңәйде — сызыкча гына түгел, квадрат тигезләмәгә китерелә торган рациональ тигезләмәләрне дә чишәргә өйрәндек.

Рациональ тигезләмәләрне элек ничек чишүебезне искә төшерик һәм чишү алгоритмын төзергә тырышырбыз.

1 нче мисал. Тигезләмәне чишәргә:

$$\frac{2x}{x-3} + \frac{11}{2} = \frac{3}{x}.$$

Чишү. Тигезләмәне түбәндәге рәвешкә китерәбез:

$$\frac{2x}{x-3} + \frac{11}{2} - \frac{3}{x} = 0$$

Бу вакытта без $A = B$ һәм $A - B = 0$ тигезлекләренең A һәм B арасындагы бер үк бәйлелекне аңлатуыннан чыгып эш итәбез. Бу безгә $\frac{3}{x}$ буынын капма-каршы тамгасы белән тигезләмәнең сул ягына чыгару мөмкинлеген бирде.

Тигезләмәнең сул ягында рәвешүзгәртүләр эшлибез:

$$\frac{2x^{|2x}}{x-3} + \frac{11^{|x(x-3)}}{2} - \frac{3^{|2(x-3)}}{x} = \frac{2x \cdot 2x + 11x(x-3) - 3 \cdot 2 \cdot (x-3)}{2x(x-3)} =$$

$$= \frac{4x^2 + 11x^2 - 33x - 6x + 18}{2x(x-3)} = \frac{15x^2 - 39x + 18}{2x(x-3)} = \frac{3(5x^2 - 13x + 6)}{2x(x-3)}.$$

Шулай итеп, бирелгән тигезләмәне без түбәндәгечә үзгәрттек:

$$\frac{3(5x^2 - 13x + 6)}{2x(x-3)} = 0. \qquad (1)$$

Вакланманың нульгә тигез булу шартын искә төшерәбез: түбәндәге ике шарт үтәлгәндә һәм бары шул вакытта гына $\frac{a}{b} = 0$ була: 1) вакланманың санаучысы нульгә тигез ($a = 0$); 2) вакланманың ваклаучысы нульгә тигез түгел ($b \neq 0$).

Тигезләмәнең (1) сул ягында вакланманың санаучысын нульгә тигезләп табабыз:

$$3(5x^2 - 13x + 6) = 0;$$

$$5x^2 - 13x + 6 = 0;$$

$$x_{1,2} = \frac{13 \pm \sqrt{13^2 - 4 \cdot 5 \cdot 6}}{2 \cdot 5} = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 120}}{10} = \frac{13 \pm 7}{10};$$

$$x_1 = \frac{13 + 7}{10} = 2, \qquad x_2 = \frac{13 - 7}{10} = \frac{3}{5} = 0{,}6.$$

Алда әйтелгән икенче шартның үтәлүен тикшерәсе калды. Тигезләмә (1) өчен $b \neq 0$ шарты $2x(x - 3) \neq 0$ икәнен, ягъни $x \neq 0$, $x \neq 3$ икәнен аңлата. $x_1 = 2$ һәм $x_2 = 0{,}6$ кыйммәтләре күрсәтелгән шартларны канәгатьләндерәләр һәм шунлыктан (1) тигезләмәнең һәм шуның белән бергә бирелгән тигезләмәнең тамырлары булып торалар.

Җавап: 2; 0,6.

чит тамыр

Әгәр санаучының тамырлары арасында ваклаучыны нульгә әйләндерә торган сан табылса, бу сан тигезләмәнең тамыры була алмый, аны ***чит тамыр*** дип атыйлар һәм җавапка кертмиләр.

Чишелгән мисалга нигезләнеп, түбәндәге алгоритмны формалаштырабыз.

Рациональ тигезләмәне чишү алгоритмы

1. Тигезләмәнең барлык буыннарын бер якка күчерергә.
2. Тигезләмәнең бу өлешен алгебраик вакланма $\frac{p(x)}{q(x)}$ рәвешенә китерергә.
3. $p(x) = 0$ тигезләмәсен чишәргә.
4. $p(x) = 0$ тигезләмәсенең һәр тамыры өчен аның $q(x) \neq 0$ шартын канәгатьләндерәме, түгелме икәнен тикшерергә. Канәгатьләндерсә — ул бирелгән тигезләмәнең тамыры; юк икән — ул чит тамыр, һәм аны җавапка кертүнең кирәге юк.

2 нче мисал. Тигезләмәне чишәргә:

$$\frac{2}{2-x}+\frac{1}{2}=\frac{4}{2x-x^2}.$$

Чишү. Алгоритм буенча эшлибез.

1) Тигезләмәне түбәндәге рәвешкә китерәбез:

$$\frac{2}{2-x}+\frac{1}{2}-\frac{4}{x(2-x)}=0.$$

2) Бу тигезләмәнең сул ягында рәвешүзгәртүләр ясыйбыз:

$$\frac{2^{|2x}}{2-x}+\frac{1^{|x(2-x)}}{2}-\frac{4^{|2}}{x(2-x)}=\frac{4x+x(2-x)-8}{2x(2-x)}=\frac{-x^2+6x-8}{2x(2-x)}=\frac{x^2-6x+8}{2x(x-2)}$$

(вакланманың санаучысында да, ваклаучысында да тамгаларны берьюлы үзгәрттек).

Шулай итеп, бирелгән тигезләмә

$$\frac{x^2-6x+8}{2x(x-2)}=0$$

рәвешен алды.

3) $x^2-6x+8=0$ тигезләмәсен чишәбез:

$$x_{1,2}=\frac{6\pm\sqrt{6^2-4\cdot1\cdot8}}{2\cdot1}=\frac{6\pm\sqrt{4}}{2}=\frac{6\pm2}{2};$$

$$x_1=\frac{6+2}{2}=4,\qquad x_2=\frac{6-2}{2}=2.$$

4) Табылган кыйммәтләр өчен $2x(x-2)\neq0$ шартының үтәлүен тикшерәбез. 4 саны бу шартны канәгатьләндерә, ә 2 саны — юк. Димәк, 4 — бирелгән тигезләмәнең тамыры, ә 2 — чит тамыр.

Җавап: 4.

2. Рациональ тигезләмәләрне яңа үзгәрешле кертү юлы белән чишү

Яңа үзгәрешле кертү юлы сезгә таныш, сез аны кулландыгыз. Аның рациональ тигезләмәләрне чишкәндә ничек кулланылуын мисалларда күрсәтербез.

3 нче мисал. $x^4 + x^2 - 20 = 0$ тигезләмәсен чишәргә.

Чишү. Яңа үзгәрешле $y = x^2$ кертәбез. $x^4 = (x^2)^2 = y^2$ булганлыктан, бирелгән тигезләмәне болай язып була:

$$y^2 + y - 20 = 0.$$

Бу — квадрат тигезләмә; өйрәнгән формулалар буенча аның тамырларын табабыз: $y_1 = 4$, $y_2 = -5$.

Ләкин $y = x^2$, мәсьәлә ике тигезләмәне чишүгә кайтып кала:

$$x^2 = 4; \qquad x^2 = -5.$$

Беренче тигезләмәдән $x_{1,2} = \pm 2$ не табабыз; икенче тигезләмәнең тамырлары юк.

Җавап: ± 2.

биквадрат тигезләмә

$ax^4 + bx^2 + c = 0$ рәвешендәге тигезләмәне **биквадрат тигезләмә** («би» — ике, ягъни ике тапкыр квадрат тигезләмә) дип атыйлар. Әле генә без биквадрат тигезләмәне чиштек. Теләсә нинди биквадрат тигезләмә 3 нче мисалдагы тигезләмә кебек чишелә: яңа $y = x^2$ үзгәрешлесе кертелә, табылган квадрат тигезләмә y үзгәрешлесенә карата чишелә, ә аннан соң x үзгәрешлесенә әйләнеп кайтыла.

4 нче мисал. Тигезләмәне чишәргә:

$$\frac{1}{x^2 + 3x - 3} + \frac{2}{x^2 + 3x + 1} = \frac{7}{5}.$$

Чишү. Биредә ике тапкыр бер үк $x^2 + 3x$ аңлатмасы очраганын күргәнсездер. Димәк, яңа $y = x^2 + 3x$ үзгәрешлесен кертү файдалы булачак. Бу безгә тигезләмәне гадирәк һәм матуррак рәвешкә китерү мөмкинлеген бирә (яңа үзгәрешле кертүнең максаты да шул бит — язылыш та гадиләшә, тигезләмәнең төзелеше дә ачыграк булып китә):

$$\frac{1}{y - 3} + \frac{2}{y + 1} = \frac{7}{5}.$$

Ә хәзер рациональ тигезләмә чишү алгоритмы буенча эшлибез.

1) Тигезләмәнең барлык буыннарын бер якка күчерәбез:

$$\frac{1}{y-3}+\frac{2}{y+1}-\frac{7}{5}=0$$

2) Тигезләмәнең сул ягында рәвешүзгәртүләр ясыйбыз:

$$\frac{1^{|5(y+1)}}{y-3}+\frac{2^{|5(y-3)}}{y+1}-\frac{7^{|(y-3)(y+1)}}{5}=$$

$$=\frac{5(y+1)+10(y-3)-7(y-3)(y+1)}{5(y-3)(y+1)}=\frac{-7y^2+29y-4}{5(y-3)(y+1)}.$$

Шулай итеп, бирелгән тигезләмәне без мондый рәвешкә китердек:

$$\frac{-7y^2+29y-4}{5(y-3)(y+1)}=0.$$

3) $-7y^2+29y-4=0$ тигезләмәсеннән табабыз: $y_1=4$, $y_2=\frac{1}{7}$ (без инде бик күп төрле квадрат тигезләмәләр чиштек, шуңа күрә эш барышын кабатлап тормыйбыз).

4) $5(y-3)(y+1)\neq 0$ шартыннан чыгып, табылган тамырларны тикшерәбез. Ике тамыр да бу шартны канәгатьләндерә.

Шулай итеп, яңа y үзгәрешлесе өчен квадрат тигезләмә чишелде: $y_1=4$, $y_2=\frac{1}{7}$.

$y=x^2+3x$, һәм y ның ике кыйммәт (4 һәм $\frac{1}{7}$) алуын истә тотып, тагын ике тигезләмә чишәбез: $x^2+3x=4$; $x^2+3x=\frac{1}{7}$. Беренче тигезләмәнең тамырлары — 1 һәм -4 саннары, икенчесенең тамырлары — $\frac{-21\pm\sqrt{469}}{14}$ саннары.

Җавап: 1, -4, $\frac{-21\pm\sqrt{469}}{14}$.

Әле каралган мисалларда яңа үзгәрешле кертү алымы бу мисалларның төзелешеннән үк ачык билгеләнә иде. Чөнки бер үк аңлатма тигезләмә язылышында берничә урында очрады, һәм аны яңа хәреф белән билгеләү отышлы иде. Әмма һәрвакыт алай булып тормый, кайбер очракларда яңа үзгәрешле рәвешүзгәртүләр барышында «пәйда була». Хәзер нәкъ менә шундый мисалны карап үтәбез.

5 нче мисал. Тигезләмәне чишәргә:

$$x(x-1)(x-2)(x-3)=24.$$

Чишү. Табабыз:

$$x(x-3)=x^2-3x;$$
$$(x-1)(x-2)=x^2-3x+2.$$

Димәк, бирелгән тигезләмәне түбәндәгечә язып була:

$$(x^2-3x)(x^2-3x+2)=24.$$

Менә хәзер яңа $y = x^2 - 3x$ үзгәрешлесе «пәйда булды». Аның ярдәмендә тигезләмәне $y(y + 2) = 24$ рәвешендә язып була һәм аннан соң $y^2 + 2y - 24 = 0$. Бу тигезләмәнең тамырлары 4 һәм -6 саннары.

Бирелгән x үзгәрешлесенә әйләнеп кайтып, ике квадрат тигезләмәне табабыз: $x^2 - 3x = 4$ һәм $x^2 - 3x = -6$. Беренче тигезләмәдән $x_1 = 4$, $x_2 = -1$; икенче тигезләмәнең тамырлары юк.

Җавап: 4; -1.

§27. РЕАЛЬ ХӘЛЛӘРНЕҢ МАТЕМАТИК МОДЕЛЬЛӘРЕ БУЛАРАК, РАЦИОНАЛЬ ТИГЕЗЛӘМӘЛӘР

Рациональ тигезләмәләрнең реаль хәлләрне сурәтләүче математик модельләр була алуы сезгә инде билгеле инде (29–30 нчы битләрдәге 5 нче мисал). Хәзер бу турыда тулырак сөйләшербез.

1 нче мисал. 60 км лы араны поезд даими тизлек белән расписаниедә билгеләнгән вакытта үтәргә тиеш була. Юлга кузгалыр алдыннан 5 мин семафор каршында торганлыктан, машинист, тизлекне 10 км/сәг кә арттырып, әлеге югалган 5 мин ны кире кайтара. Поезд расписание буенча бу араны нинди тизлек белән узарга тиеш була?

Чишү.

Беренче этап. *Математик модель төзү.*

Поездның расписаниедә каралган тизлеге x км/сәг булсын. Узасы юл 60 км га тигез һәм расписание буенча ул аны $\frac{60}{x}$ сәг тә үтәргә тиеш була.

Чынлыкта исә поезд 60 км ны $(x + 10)$ км/сәг тизлек белән уза, димәк, моның өчен ул $\frac{60}{x+10}$ сәг вакыт сарыф итә.

$\frac{60}{x}$ сәг һәм $\frac{60}{x+10}$ сәг зурлыкларының беренчесе икенчесеннән 5 мин ка, ягъни $\frac{1}{12}$ гә зуррак. Шулай итеп, тигезләмәне төзибез:

$$\frac{60}{x} - \frac{60}{x+10} = \frac{1}{12}.$$

Мәсьәләнең математик моделе төзелде. Бу рациональ тигезләмә.

Икенче этап. *Төзелгән модель белән эшләү.*

Тигезләмә табылды:

$$\frac{60}{x} - \frac{60}{x+10} - \frac{1}{12} = 0.$$

Тигезләмәнең сул ягында рәвешүзгәртүләр ясыйбыз:

$$\frac{60^{|12(x+10)}}{x} - \frac{60^{|12x}}{x+10} - \frac{1^{|x(x+10)}}{12} =$$

$$= \frac{720(x+10) - 720x - x(x+10)}{12x(x+10)} = \frac{-x^2 - 10x + 7200}{12x(x+10)}.$$

Бу вакланманың санаучысын нульгә тигезләп, $-x^2 - 10x + 7200 = 0$ квадрат тигезләмәсен табабыз, аның язылышын уңайлырак итеп үзгәртәбез: $x^2 + 10x - 7200 = 0$.

Өйрәнгән формулага нигезләнеп табабыз:

$$x_{1,2} = \frac{-10 \pm \sqrt{10^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-7200)}}{2} = \frac{-10 \pm \sqrt{28\,900}}{2} = \frac{-10 \pm 170}{2};$$

$$x_1 = \frac{-10 + 170}{2} = 80, \quad x_2 = \frac{-10 - 170}{2} = -90.$$

Ике кыйммәт тә $12x(x + 10) \neq 0$ шартын канәгатьләндерә, димәк, бу кыйммәтләр — төзелгән рациональ тигезләмәнең тамырлары.

<u>Өченче этап</u>. *Мәсьәләнең соравына җавап.*

Без поездның расписание буенча нинди тизлек белән барырга тиешлеген эзлибез. Нәкъ шул зурлыкны x хәрефе белән билгеләдек. Ике җавап: йә $x = 80$, йә $x = -90$. Икенче кыйммәт мәсьәлә шартына гомумән туры килми, чөнки поездның хәрәкәт тизлеге тискәре сан була алмый. Димәк, $x = 80$ кыйммәте мәсьәләнең җавабы була.

Җавап: 80 км/сәг.

Чишелешкә кайбер аңлатмалар биреп китәбез.

1. Билгеле, тикшерелгән вакыйга бераз идеаллаштырылган: чынбарлыкта поезд барлык араны бер үк тизлек белән үтә алмый, һәрвакыт тизләнешләр яки әкренәешләр булып тора. Ләкин математиклар моны аңлап эшлиләр.

2. Тагын бер тапкыр игътибар итегез, без гадәти фикерләүләр схемасын кулландык: математик модель төзү, төзелгән модель белән эшләү, мәсьәләнең соравына җавап бирү.

3. Беренче этап, ягъни математик модель төзү — мәсьәлә чишүнең хәлиткеч өлеше. Бу этапта мәсьәләнең шарты сөйләм теленнән математика теленә күчерелә, ягъни җитди иҗади эш башкарыла. Икенче этапта эш бик җитди, әмма

бу эш иҗади ук түгел, ул күбрәк техник эшкә тартым, чөнки алгоритм буенча эшләгәндә ниндидер яңалык уйлап табып булмый.

Сөйләм теленнән математика теленә күчерүнең ничек башкарылганын анализлап карыйк.

Эзләнелә торган зурлыкны без x дип билгеләдек. Ул безгә эзләнелгән тизлекне кертеп аңлатмалар төзү мөмкинлеген бирде. Алгебра күзлегеннән караганда, моның өчен сан белән хәрефнең әллә ни аермасы юк.

Юлны (60 км) һәм тизлекне (x км/сәг) белгәннән соң, физикадан тигез хәрәкәт законы $s = vt$ (s — юл, v — тизлек, t — вакыт) кулланып, без расписаниедә каралган вакытны таптык — ул $\frac{60}{x}$ вакланмасыннан гыйбарәт.

Шарт буенча, бу юл расписаниедә каралганнан 10 км/сәг кә артыграк тизлек белән узылган. Бу шартны да математика теленә күчерәбез: (x + 10) км/сәг — юлны чынлыкта узган тизлек, $\frac{60}{x+10}$ — поездның 60 км озынлыгындагы араны чынлыкта узган вакыты.

Аннан соң шарт буенча поезд бу арада расписание вакытын 5 мин ка кыскарта (ягъни $\frac{1}{12}$ сәгатькә). Башкача әйтсәк, расписаниедә каралган вакыт $\left(\frac{60}{x}\text{ сәг}\right)$ чынбарлыктагы вакыттан $\left(\frac{60}{x+10}\text{ сәг}\right)$ $\frac{1}{12}$ сәгатькә артыграк. Математика телендә бу $\frac{60}{x} - \frac{60}{x+10} = \frac{1}{12}$ дигән сүз (зуррак зурлыктан кечерәген алдык һәм шартта бирелгән аерманы таптык).

игътибар итегез

Бер үк исемдәге (бу очракта сәгатьләрдә) зурлыкларны чагыштырырга кирәк икәнлегенә игътибар итегез.

2 нче мисал. *A* һәм *B* пристаньнары бер үк елгада урнашканнар, *B* пристане *A* га караганда 80 км га түбәнрәк агымда. Катер *A* дан *B* га 8 сәг 20 мин эчендә барып кайта. Әгәр катерның үз тизлеге (агымсыз судагы тизлеге) 20 км/сәг булса, ул *A* дан *B* га кадәр һәм *B* дан *A* га кадәр араларны нинди тизлек белән узган?

Чишү.

Беренче этап. *Математик модель төзү.*

Әйтик, x км/сәг — елганың агым тизлеге, ди. Ул вакытта

$(20 + x)$ км/сәг — катерның агым уңаена тизлеге;

$(20 - x)$ км/сәг — катерның агымга каршы тизлеге;

$\frac{80}{20 + x}$ сәг — катерның агым уңаена барган вакыты;

$\frac{80}{20 - x}$ сәг — катерның агымга каршы барган вакыты.

Шарт буенча, катер барып кайту өчен 8 сәг 20 мин вакыт сарыф итә, ягъни $8\frac{1}{3}$ сәг яки $\frac{25}{3}$ сәг. Тик икенче яктан, катерның *A* дан *B* га барып кайткан вакыты (сәгатьләрдә) $\frac{80}{20 + x}$ һәм $\frac{80}{20 - x}$ вакланмалары суммасына тигез. Димәк, тигезләмә табабыз:

$$\frac{80}{20 + x} + \frac{80}{20 - x} = \frac{25}{3}.$$

Мәсьәләнең шартларын сөйләм теленнән математика теленә күчердек, математик модель төзелде. Бу — рациональ тигезләмә.

Икенче этап. *Төзелгән модель белән эш.*

Тигезләмә төзедек:

$$80 \cdot \left(\frac{1}{20 + x} + \frac{1}{20 - x}\right) = \frac{25}{3}.$$

Исәпләүләрне җиңеләйтү максатыннан тигезләмәнең ике ягын да 5 кә бүлү кирәк:

$$16 \cdot \left(\frac{1}{20 + x} + \frac{1}{20 - x}\right) = \frac{5}{3}.$$

Рәвешүзгәртүләр ясыйбыз:

$$16 \cdot \frac{(20 - x) + (20 + x)}{(20 + x)(20 - x)} = \frac{5}{3};$$

$$\frac{640}{(20 + x)(20 - x)} - \frac{5}{3} = 0;$$

$$\frac{640 \cdot 3 - 5(20 + x)(20 - x)}{3(20 + x)(20 - x)} = 0;$$

$$\frac{1920 - 5(400 - x^2)}{3(20 + x)(20 - x)} = 0;$$

$$\frac{5x^2 - 80}{3(20 + x)(20 - x)} = 0.$$

$5x^2 - 80 = 0$ тигезләмәсеннән табабыз: $x^2 = 16$; $x_{1,2} = \pm 4$.

Ике кыйммәт тә $3(20 + x)(20 - x) \neq 0$ шартын канәгатьләндерә, димәк, төзелгән рациональ тигезләмәнең тамырлары булып торалар.

<u>Өченче этап.</u> *Мәсьәләнең соравына җавап.*

Беренчедән, x дип без елганың агым тизлеген билгеләдек, ә тизлек тискәре сан була алмый. Шуңа күрә 4 һәм −4 кыйммәтләреннән беренчесен генә сайлап алабыз.

Икенчедән, бездән елганың агым тизлеге түгел, ә катерның A дан B га кадәр арага һәм B дан A га кадәр арага күпме *вакыт* сарыф иткәне сорала. A дан B га кадәр барган вакытны $\frac{80}{20 + x}$ сәг вакланмасы күрсәтә. Аңа x урынына 4 санын куеп табабыз: $\frac{80}{24}$, ягъни $\frac{10}{3}$ яки $3\frac{1}{3}$. Бу вакланма 3 сәг 20 мин ны аңлата.

Катерның B дан A га барган вакытын $\frac{80}{20 - x}$ сәг вакланмасы күрсәтә. x урынына 4 не куеп табабыз: $\frac{80}{16}$, ягъни 5 сәг.

Җ а в а п: 3 сәг 20 мин; 5 сәг.

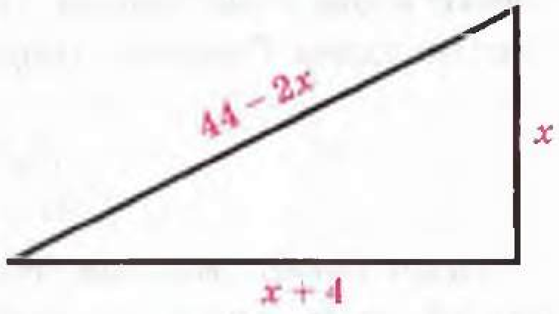
Без сезнең белән 1 һәм 2 мисаллардагы кебек тигез хәрәкәткә карата мәсьәләләрне генә чишә алабыз дип уйларга ярамый. Рациональ тигезләмәләр ярдәмендә бик күп төрле хәлләр модельләштерелә, һәм аларны чишүнең гомуми схемасы әллә ни үзгәрми. Без моңа хәзер ышанырбыз.

3 нче мисал. Турыпочмаклы өчпочмакның периметры 48 см га тигез, бер катеты икенчесеннән 4 см га зуррак. Бу өчпочмакның якларын табарга.

Чишү.

Беренче этап. *Математик модель төзү.*

Өчпочмакның кечерәк катеты x см булсын, зуррак катет $(x + 4)$ см булыр. Аның периметры 48 см булганлыктан, гипотенузасы $48 - x - (x + 4)$, ягъни $(44 - 2x)$ см булыр.



Рәс. 104

104 рәсемдә мәсьәләнең геометрик моделе сурәтләнгән: яклар озынлыклары тамгаланган турыпочмаклы өчпочмак. Бу өчпочмакка Пифагор теоремасын кулланып язабыз:

$$x^2 + (x + 4)^2 = (44 - 2x)^2.$$

Мәсьәләнең математик моделе төзелде.

Икенче этап. *Төзелгән модель белән эш.*

Эзлекле рәвештә табабыз:

$$x^2 + (x^2 + 8x + 16) = 1936 - 176x + 4x^2;$$

$$2x^2 + 8x + 16 - 1936 + 176x - 4x^2 = 0;$$

$$-2x^2 + 184x - 1920 = 0;$$

$$x^2 - 92x + 960 = 0;$$

$$x_{1,2} = \frac{92 \pm \sqrt{92^2 - 4 \cdot 1 \cdot 960}}{2} = \frac{92 \pm \sqrt{8464 - 3840}}{2} = \frac{92 \pm \sqrt{4624}}{2} = \frac{92 \pm 68}{2};$$

$$x_1 = \frac{92 + 68}{2} = 80, \quad x_2 = \frac{92 - 68}{2} = 12.$$

Өченче этап. *Мәсьәләнең соравына җавап.*

Өчпочмакның яклары озынлыклары ничәгә тигез? Кечерәк катетны без x дип билгеләдек. x өчен ике мөмкинлек бар: йә $x = 80$ см, йә $x = 12$ см. Беренче кыйммәт безгә туры килми. Чөнки өчпочмакның бер ягы аның периметрыннан зур була алмый, ә безнең шартта периметр 48 см га тигез. Бер генә мөмкинлек кала: $x = 12$ см. Ул чагында аннан 4 см га зуррак катет 16 см, ә гипотенуза $48 - 12 - 16 = 20$ см булыр.

Җавап: 12 см, 16 см, 20 см.

Искәрмә. Әле генә чишелгән мәсьәләнең математик моделен башка төрле итеп тә төзергә мөмкин иде, әйтик, кечерәк катет, элекке кебек x см булсын, $(x + 4)$ см — өчпочмакның зуррак катеты. Гипотенузаны Пифагор теоремасы буенча күрсәтәбез:

$$\sqrt{x^2 + (x+4)^2} \text{ см.}$$

Шарт буенча өчпочмакның периметры (аның өч ягының суммасы) 48 см га тигез, тигезләмәне табабыз:

$$x + (x + 4) + \sqrt{x^2 + (x+4)^2} = 48$$

һәм

$$\sqrt{2x^2 + 8x + 16} = 44 - 2x.$$

Бу тигезләмәдә үзгәрешле квадрат тамыр тамгасы астында, мондый тигезләмәне *иррациональ* дип атыйлар. Тик аларның ничек чишелүен без әлегә тикшермибез. Бу тигезләмәгә соңрак (§ 30 та) әйләнеп кайтырбыз.

4 нче мисал. Складтан 80 т йөкне чыгару өчен, автокомбинаттан бер үк йөк күтәрешле ничәдер машина сорыйлар. Комбинат җитәкчелеге һәр машинага 1 т га артыграк йөк төяп була дип хәл итә, һәм соралганнан 4 кә кимрәк машина җибәрелә. Йөкне чыгарып бетерәләр. Ничә машина соралган һәм ничә машина җибәрелгән?

Чишү.

Беренче этап. *Математик модель төзү.*

Автокомбинаттан x машина соралган дип билгелибез. Ул чагында:

$(x-4)$ — комбинат җибәргән машиналар саны;

$\frac{80}{x}$ т — һәр машинага төялергә тиешле йөк;

$\frac{80}{x-4}$ т — чынбарлыкта һәр машинага төялгән йөк.

Шарт буенча һәр машинага алдан уйланылганнан 1 т га артыграк йөк төяганнәр, ягъни $\frac{80}{x-4}$ вакланмасы белән белдерелгән зурлык $\frac{80}{x}$ вакланмасы белән белдерелгән зурлыктан 1 гә зуррак. Шулай итеп, тигезләмә төзибез:

$$\frac{80}{x-4}-\frac{80}{x}=1.$$

Математик модель төзелде.

Икенче этап. *Математик модель белән эш.*

Эзлекле рәвештә исәплибез:

$$\frac{80^{\underline{|x}}}{x-4}-\frac{80^{\underline{|x-4}}}{x}-1^{\underline{|x(x-4)}}=0;$$

$$\frac{80x-80(x-4)-x(x-4)}{x(x-4)}=0;$$

$$\frac{-x^2+4x+320}{x(x-4)}=0.$$

Килеп чыккан алгебраик вакланманың санаучысын нульгә тигезлибез:

$$-x^2+4x+320=0.$$

Бу тигезләмәне чишәбез:

$$x^2-4x-320=0;$$

$$x_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{16+4\cdot320}}{2}=\frac{4\pm\sqrt{1296}}{2}=\frac{4\pm36}{2};$$

$$x_1=\frac{4+36}{2}=20,\qquad x_2=\frac{4-36}{2}=-16.$$

Табылган ике кыйммәт тә $x(x-4)\neq0$ шартын канәгатьләндерә, димәк, алар — беренче этапта төзелгән тигезләмәнең тамырлары.

Өченче этап. *Мәсьәләнең соравына җавап.*

Без склад тарафыннан автокомбинаттан соралган машиналар санын x дип билгеләдек. Бу сан тискәре була алмый, шунлыктан ике тамырдан берсен генә сайлап алабыз: $x = 20$.

Шулай итеп, 20 машина сораган булганнар, ә 4 кә кимрәк, ягъни 16 машина җибәргәннәр.

Җавап: 20 машина, 16 машина.

5 нче мисал. Район үзәгендә «Факел» һәм «Сатурн» дип аталган ике кинотеатр бар, берсе — 400 урынлы, икенчесе — 600 урынлы. «Сатурн» кинотеатрының тамаша залында рәтләр саны «Факел» залындагыдан 4 кә артыграк, һәм һәр рәттәге урыннар саны да «Факел» залындагыдан 5 кә артыграк. «Сатурн» кинотеатрының һәр рәтендә 25 тән артыграк урын булса, «Факел» кинотеатры залында ничә урын бар?

Чишү.

Беренче этап. *Математик модель төзү.*

Әйтик, x — «Факел» кинотеатрындагы рәтләр саны булсын. Ул вакытта:

$x + 4$ — «Сатурн» кинотеатрындагы рәтләр саны;

$\frac{400}{x}$ — «Факел» кинотеатрында һәр рәттәге урыннар саны;

$\frac{600}{x+4}$ — «Сатурн» кинотеатрында һәр рәттәге урыннар саны.

Шарт буенча, «Сатурн» кинотеатрының һәр рәтендәге урыннар саны «Факел» кинотеатрындагыдан 5 кә артыграк. Димәк,

$$\frac{600}{x+4}-\frac{400}{x}=5.$$

Математик модель төзелде. Бу рациональ тигезләмә.

Икенче этап. *Төзелгән модель белән эш.*

Төзелгән рациональ тигезләмәне чишеп (чишелешне тулысы белән китереп тормыйбыз, чөнки охшаш тигезләмә алдагы мисалда чишелде), табабыз $x_1 = 20$, $x_2 = 16$.

Өченче этап. *Мәсьәләнең соравына җавап.*

Без «Факел» кинотеатрындагы рәтләр санын x дип билгеләдек. Хәзер ике мөмкинлекне анализлыйбыз: «Факел» кинотеатрында йә 20 рәт һәм, димәк, һәр рәттә 20 урын (чөнки бу кинотеатрның тамаша залында барлыгы 400 урын бар), йә 16 рәт, һәм һәр рәттә 25 урын бар. Әгәр беренче мөмкинлекне сайлап алсак, «Сатурн» кинотеатрында 24 рәт (шарт буенча андагы рәтләр саны 4 кә артык), һәм һәр рәттә 25 урын (шарт буенча «Сатурн» кинотеатрының һәр рәтендәге урыннар саны «Факел» залындагыдан 5 кә артык) була. Бу безне канәгатьләндерми, чөнки шарт буенча «Сатурн» кинотеатрының һәр рәтендә урыннар саны 25 тән артык. Икенче мөмкинлекне карыйбыз: «Факел» кинотеатрында 16 рәт һәм һәркайсында 25 урын. Ул вакытта «Сатурн» кинотеатрында 20 рәт һәм һәр рәттә 30 урын була. Монысы канәгатьләндерә.

Шулай итеп, күрсәтелгән ике мөмкинлектән икенчесен сайлап алабыз, ягъни «Факел» кинотеатрында 16 рәт бар.

Җавап: 16 рәт.

6 нчы мисал. Икеурынлы сан уйлаганнар. Шунысы билгеле:

1) бу цифрларның квадратлары суммасы 58 гә тигез;

2) әгәр сандагы цифрларның урыннары алышса, уйланылган саннан 36 га зуррак икеурынлы сан килеп чыга.

Нинди сан уйлаганнар?

Чишү.

Беренче этап. *Математик модель төзү.*

Әлеге күренешне сөйләм теленнән математика теленә күчерү өчен ике үзгәрешле кертергә туры килә: x — дистәләр цифры, y — берәмлекләр саны. Уйланылган сан $10x + y$ рәвешен ала. Әгәр цифрларның урыннарын алыштырсак, $10y + x$ була.

Беренче шарт буенча, бу сан цифрларының квадратлары суммасы 58 гә тигез, димәк,

$$x^2 + y^2 = 58.$$

Ә инде икенче шарттан, әгәр уйланылган сан цифрларының урыннарын алыштырсак, беренче саннан (ягъни $10x + y$ санынннан) 36 га зуррак булган яңа сан (без аның $10y + x$ икәнен белгеләдек) килеп чыга. Димәк,

$$(10y + x) - (10x + y) = 36,$$

аны гадиләштереп табабыз:

$$y - x = 4.$$

Шулай итеп, мәсьәләнең математик моделе тигезләмәләр системасыннан гыйбарәт:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 58, \\ y - x = 4. \end{cases}$$

Икенче этап. *Төзелгән модель белән эш.*

Гомумән алганда, без сезнең белән әлегә кадәр мондый системаларны чишмәдек. Тигезләмәләр системалары әле 9 нчы сыйныфта өйрәнелә. Нишләргә соң: мәсьәләне киләсе елга кадәр калдырып торыргамы, әллә, бераз алга китеп, хәзер үк чишәргә тырышып карарргамы? 7 нче сыйныф алгебра курсында без тигезләмәләр системалары белән беркадәр танышкан идек. Киләсе елга калдырып тормабыз. Алыштырып кую алымын кулланырбыз: икенче тигезләмәдә y ны x аша билгеләрбез һәм табылган аңлатманы беренче тигезләмәгә y урынына куябыз.

1) Системаның икенче тигезләмәсеннән $y = x + 4$.

2) Бу аңлатманы беренче тигезләмәгә y урынына куябыз:

$$x^2 + (x + 4)^2 = 58.$$

3) Табылган тигезләмәне чишәбез:

$$x^2 + (x^2 + 8x + 16) = 58;$$

$$2x^2 + 8x + 16 - 58 = 0;$$

$$2x^2 + 8x - 42 = 0;$$

$$x^2 + 4x - 21 = 0;$$

$$x_1 = 3,\ x_2 = -7.$$

4) Табылган һәр x ны $y = x + 4$ формуласына куеп карыйбыз. Әгәр $x = 3$ булса, $y = 3 + 4 = 7$; әгәр $x = -7$ булса, $y = -7 + 4 = -3$.

5) (3; 7) һәм (−7; −3) парлары — бирелгән тигезләмәләр системасының чишелешләре.

Өченче этап. *Мәсьәләнең соравына җавап.*

Шарт буенча x һәм y — икеурынлы санның цифрлары. Тискәре цифрлар була алмый, димәк, (−7; −3) пары мәсьәлә шартына туры килми. (3; 7) пары кала, ягъни $x = 3$, $y = 7$. Биредә x һәм y үзгәрешлеләренең мәгънәләре бар: x — уйланылган санның дистәләр цифрын, y — берәмлекләр цифрын күрсәтә. Димәк, 37 саны уйланылган.

Җавап: 37.

§28. КВАДРАТ ТИГЕЗЛӘМӘ ТАМЫРЛАРЫНЫҢ ТАГЫН БЕР ФОРМУЛАСЫ

Без хәзер $ax^2 + bx + c = 0$ квадрат тигезләмәсенең тамырларын

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad (1)$$

формуласы буенча табарга өйрәнеп җиттек (билгеле инде, дискриминант $D = b^2 - 4ac$ — тискәре сан булмаганда; әгәр $D < 0$ икән, формуланың мәгънәсе юк, һәм квадрат тигезләмәнең тамырлары булмый).

Ә бит математиклар исәпләүләрне җиңеләйтү мөмкинлеген беркайчан да кулларыннан ычкындырмыйлар. Биредә дә b коэффициенты җөп сан булган очракта (1) формуланы гадиләштерү мөмкинлеген күреп алганнар.

Чынлап та, $ax^2+bx+c=0$ квадрат тигезләмәсенең b коэффициенты — җөп сан, ягъни $b = 2k$ булсын ди. (1) формулага b урынына $2k$ ны куеп табабыз:

$$x_{1,2} = \frac{-2k \pm \sqrt{(2k)^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2k \pm \sqrt{4k^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2k \pm \sqrt{4(k^2 - ac)}}{2a} =$$

$$= \frac{-2k \pm 2\sqrt{k^2 - ac}}{2a} = \frac{2\left(-k \pm \sqrt{k^2 - ac}\right)}{2a} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}.$$

игътибар итегез

Шулай итеп, $ax^2+2kx+c=0$ *квадрат функциясенең тамырларын түбәндәге формула белән исәпләргә мөмкин:*

$$x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}. \qquad (2)$$

Бу формуланы (1) формула белән чагыштырыгыз әле. Аның өстенлеге нидә? Беренчедән, квадратка b түгел, ә аның яртысы $\left(k = \frac{b}{2}\right)$ күтәрелә. Икенчедән, бу квадраттан $4ac$ түгел, гап-гади ac алына. Өченчедән, ваклаучыда $2a$ түгел, ә бары a гына кала. Күрәсез, шушы өч моментта без исәпләүләрне җиңеләйтәбез. Әлеге (2) формула китерелгән квадрат тигезләмә, ягъни $a = 1$ очрагы өчен аеруча уңышлы төс ала:

$$x_{1,2} = -k \pm \sqrt{k^2 - c}. \qquad (3)$$

Бу — $x^2+2kx+c=0$ *тигезләмәсенең тамырлары формуласы.*

Беренче формула ((1) формула) һәм яңа формула ((2) яки (3)) буенча исәпләүләрне чагыштырып карау өчен, алдагы параграфка әйләнеп кайтып, анда чишелгән кайбер квадрат тигезләмәләрне кабат чишеп карарбыз.

§ 27 тагы 1 нче мисалда без квадрат тигезләмә тапкан идек:

$$x^2 + 10x - 7200 = 0.$$

Аны болай чиштек:

$$x_{1,2} = \frac{-10 \pm \sqrt{10^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-7200)}}{2} = \frac{-10 \pm \sqrt{28\,900}}{2} = \frac{-10 \pm 170}{2};$$

$$x_1 = \frac{-10 + 170}{2} = 80. \qquad x_2 = \frac{-10 - 170}{2} = -90.$$

Ә хәзер шушы квадрат тигезләмәне (3) формула буенча чишәрбез, бу очракта $b = 10$, ягъни $2k = 10$, $k = 5$:

$$x_{1,2} = -5 \pm \sqrt{5^2 - (-7200)} = -5 \pm \sqrt{7225} = -5 \pm 85;$$

$$x_1 = -5 + 85 = 80, \; x_2 = -5 - 85 = -90.$$

§ 25 тагы 3 нче мисалда квадрат тигезләмә таптык:

$$x^2 - 92x + 960 = 0.$$

Аны болай чишкән идек:

$$x_{1,2} = \frac{92 \pm \sqrt{92^2 - 4 \cdot 1 \cdot 960}}{2} = \frac{92 \pm \sqrt{8464 - 3840}}{2} =$$

$$= \frac{92 \pm \sqrt{4624}}{2} = \frac{92 \pm 68}{2};$$

$$x_1 = \frac{92 + 68}{2} = 80, \qquad x_2 = \frac{92 - 68}{2} = 12.$$

Ә хәзер шушы квадрат тигезләмәне (3) формула буенча чишәбез, биредә $b = -92$, ягъни $2k = -92$, $k = -46$:

$$x_{1,2} = 46 \pm \sqrt{46^2 - 960} = 46 \pm \sqrt{2116 - 960} =$$

$$= 46 \pm \sqrt{1156} = 46 \pm 34;$$

$$x_1 = 46 + 34 = 80, \quad x_2 = 46 - 34 = 12.$$

Яңа формуланың өстенлеген, мөгаен, сизгәнсездер.

Параграфны тәгәлләп, үзебез иске формула буенча чишкән (§ 25 тан 6 нчы мисал) тагын бер квадрат тигезләмәне карап үтәрбез. Сүз бу тигезләмә турында:

$$5x^2 - 2\sqrt{15}\,x + 1 = 0.$$

(2) формуланы кулланабыз:

$$x_{1,2} = \frac{\sqrt{15} \pm \sqrt{\left(\sqrt{15}\right)^2 - 5}}{5} = \frac{\sqrt{15} \pm \sqrt{10}}{5} = \frac{\sqrt{5}\left(\sqrt{3} \pm \sqrt{2}\right)}{5}.$$

Бу чишелешне § 25 тагы чишелеш белән чагыштырып карагыз. Болай эшләүнең җиңеллеге күз алдында.

Шулай итеп, сезгә $ax^2 + 2kx + c = 0$ рәвешендәге квадрат тигезләмә очраса, (2) (әгәр $a = 1$ булса, (3)) формуланы кулланырга киңәш итәбез — чишелеш күпкә гади булачак. Ә инде бик күп формулалар арасында буталудан курыксагыз, квадрат тигезләмә тамырларының гадәти гомуми формуласын гына кулланыгыз.

§29. ВИЕТ ТЕОРЕМАСЫ

Бу параграфта без квадрат тигезләмә тамырлары һәм аның коэффициентлары арасындагы кызыклы нисбәтләр белән танышырбыз. Әлеге нисбәтләрне беренче тапкыр француз математигы Франсуа Виет (1540–1603) ача.

Теорема 1 (Виет теоремасы)

x_1, x_2 — $ax^2 + bx + c = 0$ квадрат тигезләмәсенең тамырлары булсын ди. Ул вакытта тамырлар суммасы $-\frac{b}{a}$ га, ә тамырларның тапкырчыгышы $\frac{c}{a}$ га тигез була:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a},$$

$$x_1x_2 = \frac{c}{a}.$$

Мәсәлән, $3x^2 - 8x - 6 = 0$ тигезләмәсе өчен, аның тамырларын исәпләмичә генә, Виет теоремасы буенча — тамырларның суммасы $\frac{8}{3}$ гә, ә аларның тапкырчыгышы $-\frac{6}{3}$ га, ягъни -2 гә тигез дип әйтергә мөмкин. Ә $x^2 - 6x + 8 = 0$ тигезләмәсе өчен тамырлар суммасы 6 га, ә тамырлар тапкырчыгышы 8 гә тигез; бу очракта тамырларның 4 һәм 2 булуын да күрә алабыз.

Виет теоремасын исбатлау. $ax^2 + bx + c = 0$ квадрат тигезләмәсенең тамырлары x_1 һәм x_2 түбәндәге формулалар белән исәпләнә:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}, \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a},$$

биредә $D = b^2 - 4ac$ — тигезләмәнең дискриминанты. Тамырларны кушып, табабыз:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{-b + \sqrt{D} - b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}.$$

Беренче нисбәт исбатланды: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$.

Хәзер x_1 һәм x_2 тамырларының тапкырчыгышын исәплибез:

$$x_1x_2 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} \cdot \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} = \frac{(-b)^2 - \left(\sqrt{D}\right)^2}{4a^2} =$$

$$= \frac{b^2 - D}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}.$$

Икенче нисбәт исбатланды: $x_1x_2 = \frac{c}{a}$.

Искәрмә 1. Виет теоремасы квадрат тигезләмәнең бер генә тамыры булган очракта да ($D = 0$) дөрес, бу очракта тигезләмәнең бер үк төрле ике тамыры бар дип уйланыла һәм аларга алдагы нисбәтләрне кулланалар.

Исбатланылган нисбәтләр китерелгән квадрат тигезләмә $x^2+px+q=0$ өчен бигрәк тә гади рәвештә булалар. Бу очракта:

$$x_1 + x_2 = -p, \quad x_1x_2 = q,$$

ягъни ***китерелгән квадрат тигезләмәнең тамырлары суммасы — капма-каршы тамгасы белән алынган икенче коэффициентка, ә тамырның тапкырчыгышы ирекле буынга тигез була.***

Виет теоремасы ярдәмендә квадрат тигезләмәнең тамырлары һәм коэффициентлары арасындагы башка нисбәтләрне дә табарга мөмкин. Әйтик, x_1 һәм x_2 — $x^2+px+q=0$ китерелгән квадрат тигезләмәнең тамырлары ди. Ул вакытта

$$x_1^2 + x_2^2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 2x_1x_2 =$$

$$= (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = (-p)^2 - 2q = p^2 - 2q.$$

Шулай итеп,

$$x_1^2 + x_2^2 = p^2 - 2q.$$

Әмма Виет теоремасының әһәмияте аның квадрат тигезләмә тамырлары һәм коэффициентлары арасындагы кайбер нисбәтләрне билгеләвендә түгел. Иң мөһиме — Виет теоремасы ярдәмендә квадрат өчбуынны тапкырлаучыларга таркату формуласы чыгарыла, безгә иң кирәге — әнә шул.

Теорема 2

Әгәр x_1 һәм x_2 — ax^2+bx+c квадрат өчбуынының тамырлары булса,

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$$

бердәйлеге дөрес була.

Исбатлау. Табабыз:

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right).$$

Виет теоремасы буенча, $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$, $x_1x_2=\frac{c}{a}$. Димәк,

$$a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a(x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2)=$$

$$=a(x^2-x_1x-x_2x+x_1x_2)=$$

$$=a(x(x-x_1)-x_2(x-x_1))=a(x-x_1)(x-x_2).$$

Искәрмә 2. Әгәр ax^2+bx+c квадрат өчбуынының дискриминанты нульгә тигез булса (ягъни $x_1=x_2$ кабатлы тамыр), исбатланган формула

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)^2$$

рәвешен ала.

Теорема 3

Әгәр квадрат өчбуын сызыкча тапкырлаучыларга таркалса, аның тамырлары була.

Исбатлау. $ax^2+bx+c=(kx+l)(mx+n)$ булсын. Табылган тапкырчыгышны үзгәртеп язабыз:

$$k\left(x+\frac{l}{k}\right)m\left(x+\frac{n}{m}\right).$$

Димәк,

$$ax^2+bx+c=km\left(x+\frac{l}{k}\right)\left(x+\frac{n}{m}\right).$$

$-\frac{l}{k}$ һәм $-\frac{n}{m}$ саннары — квадрат өчбуынның тамырлары.

Теорема 4 ***Әгәр квадрат өчбуынның тамырлары булмаса, аны тапкырлаучыларга таркатып булмый.***

Исбатлау. Капма-каршысын фаразлыйбыз: $ax^2 + bx + c$ квадрат өчбуынын $(kx + l) \cdot (mx + n)$ рәвешендә язарга мөмкин булсын. Ул вакытта 3 нче теорема буенча аның тамырлары бар, ә бу шартка каршы килә. Димәк, безнең фаразлау дөрес түгел, ягъни квадрат өчбуынны сызыкча тапкырлаучыларга таркатып булмый.

1 нче мисал. Квадрат өчбуынны тапкырлаучыларга таркатырга:

а) $3x^2 - 10x + 3$; б) $16x^2 - 24x + 9$.

Чишү. а) $3x^2-10x+3=0$ тигезләмәсен чишеп, $3x^2-10x+3$ квадрат өчбуынының тамырларын табабыз: $x_1 = 3$, $x_2 = \frac{1}{3}$. 2 нче теорема нигезендә табабыз:

$$3x^2 - 10x + 3 = 3(x - 3)\left(x - \frac{1}{3}\right).$$

$3\left(x - \frac{1}{3}\right)$ не $3x - 1$ дип язу дөрес булыр. Димәк,

$$3x^2 - 10x + 3 = (x - 3)(3x - 1).$$

Бирелгән квадрат өчбуынны 2 нче теореманы кулланып тормыйча, группалау юлы белән дә тапкырлаучыларга таркатырга мөмкин иде:

$$3x^2 - 10x + 3 = 3x^2 - 9x - x + 3 =$$
$$= 3x(x - 3) - (x - 3) = (x - 3)(3x - 1).$$

Ләкин, күрәсез, бу очракта уңыш уңайлы группалар таба алу осталыгына бәйләнгән, ә беренче алым белән эшләү һәрвакыт уңайлы.

б) Бирелгән аңлатма — тулы квадрат:

$$16x^2 - 24x + 9 = (4x)^2 + 3^2 - 2 \cdot 4x \cdot 3.$$

Димәк, $16x^2 - 24x + 9 = (4x - 3)^2$.

2 нче теореманы кулланып була идеме? Карагыз:

$x_{1,2} = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 16 \cdot 9}}{16} = \frac{12 \pm 0}{16}$. Димәк, $x_1 = x_2 = \frac{3}{4}$, шунлыктан

$16x^2 - 24x + 9 = 16\left(x - \frac{3}{4}\right)\left(x - \frac{3}{4}\right) = (4x-3)(4x-3) = (4x-3)^2$. ▣

2 нче мисал. Вакланманы кыскартырга: $\frac{2x^2 + 5x + 2}{x^2 - 4x - 12}$.

Чишү. $2x^2 + 5x + 2 = 0$ тигезләмәсеннән табабыз: $x_1 = -2$, $x_2 = -\frac{1}{2}$. Димәк,

$$2x^2 + 5x + 2 = 2(x - (-2))\left(x - \left(-\frac{1}{2}\right)\right) =$$

$$= 2(x + 2)\left(x + \frac{1}{2}\right) = (x + 2)(2x + 1).$$

$x^2 - 4x - 12 = 0$ тигезләмәсеннән табабыз: $x_1 = 6$, $x_2 = -2$. Шуңа күрә

$$x^2 - 4x - 12 = (x - 6)(x - (-2)) = (x - 6)(x + 2).$$

Ә хәзер бирелгән вакланманы кыскартабыз:

$$\frac{2x^2 + 5x + 2}{x^2 - 4x - 12} = \frac{(x + 2)(2x + 1)}{(x - 6)(x + 2)} = \frac{2x + 1}{x - 6}.$$ ▣

3 нче мисал. Аңлатманы тапкырлаучыларга таркатырга:

а) $x^4 + 5x^2 + 6$; б) $2x + \sqrt{x} - 3$.

Чишү. а) Яңа үзгәрешле $y = x^2$ кертәбез. Бу безгә бирелгән аңлатманы y үзгәрешлесенә карата квадрат өчбуын рәвешендә, төгәлрәге, $y^2 + 5y + 6$ дип язу мөмкинлеге бирә. $y^2 + 5y + 6 = 0$ тигезләмәсен чишеп, $y^2 + 5y + 6$ квадрат өчбуынының тамырларын табабыз: $y_1 = -2$, $y_2 = -3$. Хәзер 2 нче теореманы кулланабыз:

$$y^2 + 5y + 6 = (y + 2)(y + 3).$$

$y = x^2$ икәнен искә төшереп, бирелгән аңлатмага кайтабыз. Димәк,

$$x^4 + 5x^2 + 6 = (x^2 + 2)(x^2 + 3).$$

б) Яңа үзгәрешле $y = \sqrt{x}$ кертәбез. Бу безгә бирелгән аңлатманы y үзгәрешлесенә карата квадрат өчбуын рәвешендә, төгәлрәге, $2y^2 + y - 3$ дип язу мөмкинлеген бирә. $2y^2 + y - 3 = 0$ тигезләмәсен чишеп, $2y^2 + y - 3$ квадрат өчбуынының тамырларын табабыз: $y_1 = 1$, $y_2 = -\frac{3}{2}$. Димәк,

$$2y^2 + y - 3 = 2(y - 1)\left(y + \frac{3}{2}\right) = (y - 1)(2y + 3).$$

$y = \sqrt{x}$ икәнен истә тотып, бирелгән аңлатмага кайтабыз:

$$2x + \sqrt{x} - 3 = \left(\sqrt{x} - 1\right)\left(2\sqrt{x} + 3\right).$$

Теорема 5 ***Әгәр x_1, x_2 саннары белән $x_1 + x_2 = -p$ һәм $x_1x_2 = q$ тигезлекләре үтәлсә, бу саннар — $x^2 + px + q = 0$ квадрат тигезләмәсенең тамырлары.***

Исбатлау. $p = -(x_1 + x_2)$ һәм $q = x_1x_2$ булганлыктан, $x^2 + px + q = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = x^2 - x_1x - x_2x + x_1x_2 = x(x - x_1) - x_2(x - x_1) = (x - x_1)(x - x_2)$. Димәк, $x^2 + px + q = 0$ тигезләмәсен без $(x - x_1)(x - x_2) = 0$ рәвешенә китердек, моннан x_1, x_2 нең тигезләмә тамырлары булуы килеп чыга.

Әлеге раслауга нигезләнеп, бик күп квадрат тигезләмәләрне, тигезләмә тамырларын табуның катлаулы формулаларын кулланмыйча, телдән чишәргә, шулай ук бирелгән тамырлары буенча квадрат тигезләмәләр төзергә мөмкин.

1) $x^2 - 11x + 24 = 0$. Биредә $x_1 + x_2 = 11$, $x_1x_2 = 24$. $x_1 = 8$, $x_2 = 3$ икәнлеге җиңел аңлашыла.

2) $x^2 + 11x + 30 = 0$. Биредә $x_1 + x_2 = -11$, $x_1x_2 = 30$. $x_1 = -5$, $x_2 = -6$ икәнлеге җиңел аңлашыла.

Игътибар итегез: әгәр тигезләмәнең ирекле буыны уңай сан булса, ике тамыр да йә тискәре, йә уңай; тамырлар сайлап алганда бу бик мөһим.

3) $x^2 + x - 12 = 0$. Биредә $x_1 + x_2 = -1$, $x_1x_2 = -12$. $x_1 = 3$, $x_2 = -4$ икәнлеге җиңел аңлашыла.

Игътибар итегез: әгәр тигезләмәнең ирекле буыны тискәре сан булса, тамырлар, һичшиксез, бар һәм алар капма-каршы тамгалы булалар; тамырлар сайлап алганда бу бик мөһим.

4) $5x^2 + 17x - 22 = 0$. Биредә $x = 1$ нең тигезләмәне канәгатьләндерүе ачык күренә, ягъни $x_1 = 1$ — тигезләмәнең тамыры. $x_1x_2 = -\frac{22}{5}$ һәм $x_1 = 1$ булганлыктан, $x_2 = -\frac{22}{5}$.

5) $x^2 - 293x + 2830 = 0$. Биредә $x_1 + x_2 = 293$, $x_1x_2 = 2830$. Әгәр $2830 = 283 \cdot 10$, ә $293 = 283 + 10$ икәненә игътибар итсәк, $x_1 = 283$, $x_2 = 10$ икәне ачык күренә (ә хәзер бу квадрат тигезләмәне гадәти формулалар белән чишү өчен нинди исәпләүләр ясыйсын күз алдына китерегез).

6) Тамырлары булып $x_1 = 8$, $x_2 = -4$ саннары торган квадрат тигезләмә төзибез. Гадәттә, мондый очракларда китерелгән квадрат тигезләмә $x^2 + px + q = 0$ төзиләр. $x_1 + x_2 = -p$ булганлыктан, $8 - 4 = -p$, ягъни $p = -4$. Ә инде $x_1x_2 = q$, ягъни $8 \cdot (-4) = q$ яки $q = -32$. Шулай итеп, $p = -4$, $q = -32$, димәк, эзләнелгән квадрат тигезләмә $x^2 - 4x - 32 = 0$ рәвешендә була.

§ 30*. ИРРАЦИОНАЛЬ ТИГЕЗЛӘМӘЛӘР

Әгәр тигезләмәдә үзгәрешле зурлык квадрат тамыр тамгасы астында булса, бу **иррациональ** тигезләмә дип атала. Кайвакыт реаль хәлләрнең математик моделе иррациональ тигезләмәләр рәвешен ала, без сезнең белән моны күргән идек инде (§ 27 тан 3 нче мисалга искәрмә). Шуңа күрә безгә иң гади иррациональ тигезләмәләрне генә булса да чишәргә өйрәнергә кирәк (катлаулылары югары сыйныфларда өйрәнелә).

Шундый иррациональ тигезләмәне карыйк:

$$\sqrt{2x + 1} = 3.$$

иррациональ тигезләмә

квадратка күтәрү алымы

Квадрат тамыр билгеләмәсе буенча, бу тигезлек $2x + 1 = 3^2$ икәнен аңлата. Без биредә бирелгән иррациональ тигезләмәдән, аның ике ягын да квадратка күтәреп, рациональ $2x + 1 = 9$ тигезләмәсенә күчтек. Тигезләмәнең ике ягын да **квадратка күтәрү алымы** — иррациональ тигезләмәләрне чишүнең төп ысулы. Бу аңлашыла да, квадрат тамыр тамгасыннан тагын ничек котылып булсын ди. $2x + 1 = 9$ тигезләмәсеннән

$x=4$. Бу — $2x+1=9$ тигезләмәсенең дә, бирелгән иррациональ тигезләмәнең дә тамыры.

Квадратка күтәрү алымы артык катлаулы түгел, тик кайвакыт буталышка китерә. Мәсәлән, түбәндәге иррациональ тигезләмәне карыйк:

$$\sqrt{2x-5}=\sqrt{4x-7}.$$

Ике якны да квадратка күтәреп табабыз:

$$\left(\sqrt{2x-5}\right)^2=\left(\sqrt{4x-7}\right)^2;$$

$$2x-5=4x-7;$$

$$x=1.$$

Әмма $x=1$ кыйммәте, $2x-5=4x-7$ рациональ тигезләмәсенең тамыры булса да, бирелгән иррациональ тигезләмәнең тамыры була алмый. Ни өчен? Бирелгән иррациональ тигезләмәдә x урынына 1 не куеп, $\sqrt{-3}=\sqrt{-3}$ не табабыз. Әгәр санлы тигезлекнең уң һәм сул якларында мәгънәләре булмаган аңлатмалар тора икән, бу тигезлек турында берни дә әйтеп булмый. Мондый очракларда $x=1$ — бирелгән иррациональ тигезләмә өчен *чит тамыр* диләр. Шулай булгач, бирелгән иррациональ тигезләмәнең тамырлары булмый.

Иррациональ тигезләмәне чишәбез:

$$\sqrt{2x^2+5x-2}=x-6.$$

Квадратка күтәрү алымын кулланабыз:

$$\left(\sqrt{2x^2+5x-2}\right)^2=(x-6)^2;$$

$$2x^2+5x-2=x^2-12x+36;$$

$$2x^2+5x-2-x^2+12x-36=0;$$

$$x^2+17x-38=0.$$

Бу тигезләмәнең тамырларын, узган параграфның ахырында эшләгәнчә, телдән табып була: аларның тапкырчыгышы −38 гә, ә суммасы −17 гә тигез; боларның 2 һәм −19 саннары икәненә төшенү кыен түгел. Шулай итеп, $x_1=2$, $x_2=-19$.

Бирелгән иррациональ тигезләмәгә x урынына 2 кыйммәтен куеп табабыз:

$$\sqrt{2 \cdot 2^2 + 5 \cdot 2 - 2} = 2 - 6, \text{ ягъни } \sqrt{16} = -4.$$

Бу дөрес түгел.

Ә хәзер иррациональ тигезләмәгә x урынына -19 ны куябыз:

$$\sqrt{2 \cdot (-19)^2 + 5 \cdot (-19) - 2} = -19 - 6, \text{ ягъни } \sqrt{625} = -25.$$

Бу да дөрес түгел.

Нинди нәтиҗә ясала? Табылган ике кыйммәт тә — чит тамырлар. Башкача әйтсәк, бирелгән иррациональ тигезләмәнең, алдагысы кебек үк, тамырлары юк.

Чит тамыр — безнең өчен яңа төшенчә түгел, рациональ тигезләмәләрне чишкәндә дә чит тамырлар табылган иде, аларны тикшереп карарга кирәк. Иррациональ тигезләмәләр өчен тикшерү — тигезләмә чишүнең мәҗбүри этабы, ул, булган очракта, чит тамырларны ачыкларга һәм аларны чишелешкә кертмәскә ярдәм итә.

игътибар итегез

Шулай итеп, *иррациональ тигезләмәне аның ике ягын да квадратка күтәрү юлы белән чишәләр; килеп чыккан рациональ тигезләмәне чишкәннән соң, һичшиксез тикшерү үткәрергә, булган чит тамырларны төшереп калдырырга кирәк.*

Бу нәтиҗәне кулланып, берничә мисал чишәрбез.

1 нче мисал. Тигезләмәне чишәргә:

$$\sqrt{5x-16} = x - 2. \qquad (1)$$

Чишү. (1) тигезләмәнең ике ягын да квадратка күтәрәбез:

$$\left(\sqrt{5x - 16}\right)^2 = (x - 2)^2.$$

Эзлекле рәвештә табабыз:

$$5x - 16 = x^2 - 4x + 4;$$

$$x^2 - 4x + 4 - 5x + 16 = 0;$$

$$x^2 - 9x + 20 = 0;$$

$$x_1 = 5, \quad x_2 = 4.$$

Тикшерү. (1) тигезләмәгә $x = 5$ не куеп, дөрес тигезлек — $\sqrt{9} = 3$ не табабыз. (1) тигезләмәгә $x = 4$ не куйгач та, дөрес тигезлек $\sqrt{4} = 2$ табыла. Димәк, табылган ике кыйммәт тә — (1) тигезләмәсенең тамырлары.

Җавап: 4; 5.

2 нче мисал. $\sqrt{2x^2 + 8x + 16} = 44 - 2x$ тигезләмәсен чишәргә (бу тигезләмә безгә § 27 та очраган иде, һәм без аны, уңайлы вакыт җиткәнче дип, калдырып тордык).

Чишү. Бирелгән иррациональ тигезләмәнең ике ягын да квадратка күтәреп, табабыз:

$$2x^2 + 8x + 16 = (44 - 2x)^2;$$
$$2x^2 + 8x + 16 = 1936 - 176x + 4x^2;$$
$$-2x^2 + 184x - 1920 = 0;$$
$$x^2 - 92x + 960 = 0;$$
$$x_1 = 80,\ x_2 = 12.$$

Тикшерү. Бирелгән иррациональ тигезләмәгә $x = 80$ не куябыз:

$$\sqrt{2 \cdot 80^2 + 8 \cdot 80 + 16} = 44 - 2 \cdot 80;$$

биредә дөрес булмаган тигезлек табыласы ачык, чөнки аның уң ягында — тискәре сан, ә сул ягында — уңай сан. Димәк, $x = 80$ — тигезләмә өчен чит тамыр.

Бирелгән иррациональ тигезләмәгә $x = 12$ не куеп язабыз:

$$\sqrt{2 \cdot 12^2 + 8 \cdot 12 + 16} = 44 - 2 \cdot 12,$$

ягъни $\sqrt{400} = 20$ — дөрес тигезлек. Димәк, $x = 12$ — бирелгән тигезләмәнең тамыры.

Җавап: 12.

3 нче мисал. Тигезләмәне чишәргә:

$$\sqrt{3x + 7} + \sqrt{x + 2} = 3. \qquad (2)$$

Чишү. $\sqrt{3x + 7} = 3 - \sqrt{x + 2}$ рәвешенә китерәбез һәм квадратка күтәрү алымын кулланабыз:

$$\left(\sqrt{3x+7}\right)^2 = \left(3-\sqrt{x+2}\right)^2;$$

$$3x + 7 = 3^2 - 2\cdot 3\cdot \sqrt{x+2} + \left(\sqrt{x+2}\right)^2;$$

$$3x + 7 = 9 - 6\sqrt{x+2} + x + 2;$$

$$6\sqrt{x+2} = 9 + x + 2 - 3x - 7;$$

$$6\sqrt{x+2} = 4 - 2x;$$

$$3\sqrt{x+2} = 2 - x.$$

Тагын бер тапкыр квадратка күтәрү алымын кулланабыз:

$$\left(3\sqrt{x+2}\right)^2 = (2-x)^2;$$

$$9(x+2) = 4 - 4x + x^2;$$

$$9x + 18 - 4 + 4x - x^2 = 0;$$

$$-x^2 + 13x + 14 = 0;$$

$$x^2 - 13x - 14 = 0;$$

$$x_1 = 14,\ x_2 = -1.$$

Тикшерү. (2) тигезләмәгә $x = 14$ куеп табабыз: $\sqrt{49} + \sqrt{16} = 3$ — дөрес тигезлек түгел; димәк, $x = 14$ — чит тамыр.

(2) тигезләмәгә $x = -1$ не куеп табабыз: $\sqrt{4} + \sqrt{1} = 3$ — дөрес тигезлек, димәк, $x = -1$ — (2) тигезләмәнең тамыры.

Җавап: -1.

4 нче мисал. Тигезләмәне чишәргә:

$$2x + \sqrt{x} - 3 = 0.$$

Чишү. Билгеле, бу тигезләмәне алда кулланылган схема буенча чишәргә: тигезләмәне $\sqrt{x} = 3 - 2x$ рәвешендә язарга, бу тигезләмәнең ике ягын да квадратка күтәрергә, табылган рациональ тигезләмәне чишәргә һәм табылган тамырларны бирелгән иррациональ тигезләмәгә куеп тикшерергә мөмкин.

Ә без тагын да нәфисрәк алым кулланыйк: яңа $y = \sqrt{x}$ үзгәрешлесен кертербез. Ул чагында y үзгәрешлесенә карата $2y^2 + y - 3 = 0$ квадрат тигезләмәсен табабыз. Аның тамырларын исәплибез: $y_1 = 1$, $y_2 = -\frac{3}{2}$. Шулай итеп, мәсьәлә ике тигезләмәне чишүгә кайтып кала:

$$\sqrt{x} = 1; \qquad \sqrt{x} = -\frac{3}{2}.$$

Беренче тигезләмәдән $x = 1$ не табабыз, икенче тигезләмәнең тамырлары юк ($\sqrt{x}$ ның бары тик уңай кыйммәтләр генә алуын хәтерлисездер).

Җ а в а п: 1.

Бу параграфны җитди теоретик сөйләшү белән тәмамлыйбыз. Сез инде төрле: сызыкча, квадрат, рациональ, иррациональ тигезләмәләр чишүдә беркадәр тәҗрибә тупладыгыз. Тигезләмәләр чишкәндә төрле рәвешүзгәртүләр ясарга кирәклеген дә беләсез, мәсәлән:

тигезләмәнең буынын аның бер ягыннан икенчесенә капма-каршы тамгасы белән чыгаралар;

тигезләмәнең ике ягын да нульгә тигез булмаган бер үк санга тапкырлыйлар яисә бүләләр;

ваклаучыдан котылалар, ягъни $\frac{p(x)}{q(x)} = 0$ тигезләмәсен $p(x) = 0$ тигезләмәсенә алыштыралар;

тигезләмәнең ике ягын да квадратка күтәрәләр.

Билгеле, кайбер рәвешүзгәртүләр нәтиҗәсендә чит тамырлар барлыкка килүгә дә игътибар иткәнсездер, шуңа күрә бик сак булырга: табылган барлык тамырларны тикшерергә кирәк. Менә хәзер боларны теория ягыннан ачыкларга тырышырбыз.

Билгеләмә. Ике тигезләмә $f(x) = g(x)$ һәм $r(x) = s(x)$ бер үк тамырларга ия булсалар (яки, аерым алганда, икесенең дә тамырлары булмаса), **тигезкөчле** тигезләмәләр дип атала.

тигез көчле тигезләмәләр

тигезләмәне тигезкөчле үзгәртү

Гадәттә, тигезләмәне чишкәндә, аны гадирәк, әмма аңа тигезкөчле икенче тигезләмә белән алыштырырга тырышалар. Мондый алыштыруны **тигезләмәне тигезкөчле рәвешүзгәртү** дип атыйлар.

Тигезләмәне тигезкөчле рәвешүзгәртүләргә түбәндәгеләр керә:

1. *Тигезләмәнең буыннарын аның бер ягыннан икенчесенә капма-каршы тамгасы белән чыгару.*

Мәсәлән, $2x+5=7x-8$ тигезләмәсен $2x-7x=-8-5$ тигезләмәсе белән алыштыру — тигезләмәне тигезкөчле рәвешүзгәртү була. Димәк, $2x+5=7x-8$ һәм $2x-7x=-8-5$ тигезләмәләре тигезкөчле.

2. *Тигезләмәнең ике ягын да нульгә тигез булмаган бер үк санга тапкырлау яки бүлү.*

Мәсәлән, $0{,}5x^2-0{,}3x=2$ тигезләмәсен $5x^2-3x=20$ тигезләмәсе белән алыштыру (ике якны да буынлап 10 га тапкырладык) — тигезләмәне тигезкөчле рәвешүзгәртү.

Түбәндәге рәвешүзгәртүләр тигезләмәне тигезкөчле булмаган рәвешүзгәртүләр китереп чыгарырга мөмкин.

1. *Үзгәрешлеләр кергән ваклаумалардан котылу.*

Мәсәлән, $\frac{x^2}{x-2}=\frac{4}{x-2}$ тигезләмәсен $x^2=4$ тигезләмәсе белән алыштыру — тигезләмәне тигезкөчле булмаган рәвешүзгәртү. Чөнки $x^2=4$ тигезләмәсенең ике тамыры: 2 һәм -2 бар, ә бирелгән тигезләмәне $x=2$ тамыры канәгатьләндерми (ваклаучы нульгә әйләнә). Мондый очракларда без $x=2$ чит тамыр дибез.

2. *Тигезләмәнең ике ягын да квадратка күтәрү.*

Мисаллар китереп тормыйбыз, бу параграфта моңа мисаллар җитәрлек булды.

Әгәр тигезләмә чишү барышында күрсәтелгән тигезкөчле булмаган рәвешүзгәртүнең берәрсе үтәлсә, барлык тамырларны башлангыч тигезләмәгә куеп тикшерергә кирәк, чөнки алар арасында чит тамырлар булырга мөмкин.

ТӨП ТӨШЕНЧӘЛӘР

Бу бүлектә сез математика теленең яңа атамалары белән таныштыгыз:
квадрат тигезләмә, квадрат өчбуын;
өлкән коэффициент, икенче коэффициент, ирекле буын (квадрат тигезләмә өчен);
тулы квадрат тигезләмә, тулы булмаган квадрат тигезләмә;
китерелмәгән квадрат тигезләмә, китерелгән квадрат тигезләмә;
квадрат тигезләмәнең (квадрат өчбуынның) тамыры;
квадрат тигезләмәнең (квадрат өчбуынның) дискриминанты;
рациональ тигезләмә;
биквадрат тигезләмә;
иррациональ тигезләмә;
параметр, параметрлы тигезләмә;
чит тамыр (рациональ яки иррациональ тигезләмә өчен);
тигезкөчле тигезләмәләр;
тигезләмәне тигезкөчле һәм тигезкөчле булмаган рәвешүзгәртүләр.

Без формулалар чыгардык:
$ax^2 + bx + c = 0$ квадрат тигезләмәсе тамырлары формуласы:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a};$$

$ax^2 + 2kx + c = 0$ квадрат тигезләмәсе тамырлары формуласы:

$$x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a};$$

квадрат өчбуынны тапкырлаучыларга таркату формуласы:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$$

биредә x_1, x_2 — квадрат өчбуынның тамырлары.

Без $ax^2+bx+c=0$ квадрат тигезләмәсе тамырлары саны белән аның дискриминанты $D=b^2-4ac$ арасындагы һәм тигезләмә тамырлары белән аның коэффициентлары арасындагы бәйлелекләр турында теоремалар исбатладык:
әгәр $D<0$ булса, тигезләмәнең реаль тамырлары юк;
әгәр $D=0$ булса, тигезләмәнең бер тамыры (яки бер үк төрле ике тамыры) бар;
әгәр $D>0$ булса, тигезләмәнең төрле ике тамыры бар;
әгәр x һәм x_2 — тигезләмәнең тамырлары булса,

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a}, \qquad x_1x_2=\frac{c}{a}$$ (Виет теоремасы).

Китерелгән квадрат тигезләмә $x^2+px+q=0$ өчен бу нисбәтләр түбәндәге рәвештә:

$$x_1+x_2=-p, \qquad x_1x_2=q.$$

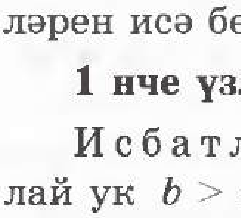
Без түбәндәге алгоритмнарны эшләдек:
квадрат тигезләмә чишү алгоритмы;
рациональ тигезләмә чишү алгоритмы.

5 БҮЛЕК ТИГЕЗСЕЗЛЕКЛӘР

§ 31. *Санлы тигезсезлекләрнең үзлекләре*
§ 32. *Функцияләрне монотонлыкка тикшерү*
§ 33. *Сызыкча тигезсезлекләр чишү*
§ 34. *Квадрат тигезсезлекләр чишү*
§ 35. *Реаль саннарның якынча кыйммәтләре*
§ 36. *Уңай санның стандарт рәвеше*

§31. САНЛЫ ТИГЕЗСЕЗЛЕКЛӘРНЕҢ ҮЗЛЕКЛӘРЕ

§12 та без *санлы тигезсезлеккә* билгеләмә биргән идек: $a > b$ — бу $a - b$ уңай сан дигән сүз, $a < b$ — бу $a - b$ — тискәре сан дигән сүз. Санлы тигезсезлекләр берничә үзлеккә ия һәм аларны белү безгә киләчәктә — тигезсезлекләр белән эшләгәндә ярдәм итәчәк.



Хәер, §11 та ук инде $\sqrt{5}$ санын бәяләү ($2 < \sqrt{5} < 3$; $2{,}2 < \sqrt{5} < 2$ һ.б.) белән шөгыльләнгәндә, без санлы тигезсезлекләрнең үзлекләренә таянган идек (интуиция белән генә булса да). §12 та да тигезсезлек тамгаларын (һәм үзлекләрен дә) актив кулландык. Санлы тигезләмәләрнең үзлекләрен исә без менә шушы параграфта өйрәнербез.

1 нче үзлек. ***Әгәр $a > b$ һәм $b > c$ булса, $a > c$ була.***

Исбатлау. Шарт буенча $a > b$, ягъни $a - b$ — уңай сан. Шулай ук $b > c$, димәк, $b - c$ да уңай сан була.

Уңай $a - b$ һәм $b - c$ саннарын кушып, уңай сан алабыз. Табабыз: $(a - b) + (b - c) = a - c$. Димәк, $a - c$ — уңай сан, ягъни $a > b$, шуны исбатларга кирәк иде.

Рәс. 105

1 нче үзлекне реаль саннар күплегенең геометрик моделеннән — саннар турысыннан файдаланып та нигезләргә мөмкин. $a > b$ тигезсезлеге — саннар турысында a ноктасы b ноктасыннан уңгарак урнашкан, ә $b > c$ тигезсезлеге — b ноктасы c ноктасыннан уңдарак урнашкан дигән сүз (рәс. 105). Тик бу вакытта a ноктасы турыда c ноктасыннан уңдарак урнаша. Ягъни $a > c$.

1 нче үзлекне, гадәттә, *транзитивлык үзлеге* дип тә атыйлар (образлы итеп әйтсәк, a пунктыннан c пунктына транзит белән, ягъни b пунктында тукталыш ясап барып җитәбез).

2 нче үзлек. ***Әгәр $a > b$ булса, $a + c > b + c$.***

3 нче үзлек. ***Әгәр $a > b$ һәм $m > 0$ булса $am > bm$;***
әгәр $a > b$ һәм $m < 0$ булса, $am < bm$.

3 нче үзлекнең мәгънәсе түбәндәгечә:
тигезсезлекнең ике ягын да бер үк уңай санга тапкырлаганда, тигезсезлек билгесен сакларга кирәк;
тигезсезлекнең ике ягын да бер үк тискәре санга тапкырлаганда, тигезсезлек билгесен үзгәртергә (< не > ка, > ны < кә) кирәк.

Тигезсезлекнең ике ягын да бер үк уңай яки тискәре санга тапкырлаганда да бу үзлек үтәлә, чөнки m га бүлүне һәрвакыт $\frac{1}{m}$ гә тапкырлау белән алыштырырга мөмкин.

Аерым алганда, өченче үзлектән $a > b$ тигезсезлегенең ике ягын да -1 гә тапкырлаганнан $-a < -b$ икәне килеп чыга. Димәк, ***тигезсезлекнең ике ягында да тамгаларны үзгәртсәк, тигезсезлек тамгасын да үзгәртергә кирәк икән: әгәр $a > b$ булса, $-a < -b$.***

4 нче үзлек. ***Әгәр $a > b$ һәм $c > d$ булса, $a + c > b + d$.***

Исбатлау.

I юл. Шарт буенча $a > b$ һәм $c > d$, димәк, $a - b$ һәм $c - d$ — уңай саннар. Ул чагында аларның суммасы да, ягъни $(a - b) + (c - d)$ — уңай сан.

$$(a - b) + (c - d) = (a + c) - (b + d),$$

булганлыктан, $(a + c) - (b + d)$ — уңай сан. Шуңа күрә

$$a + c > b + d.$$

II юл. $a > b$ булганлыктан, 2 нче үзлек буенча $a + c > b + c$. Шулай ук $c > d$ булганлыктан, $c + b > d + b$.

Димәк, $a + c > b + c$, $b + c > b + d$. Ул вакытта транзитивлык үзлеге буенча $a + c > b + d$.

Искәрмә 1. Без биредә исбатлауның ике юлын махсус бирдек, аларның кайсысы сезгә күбрәк ошый яки яхшырак аңлашыла — үзегез сайлап алыгыз. Моннан тыш, бер үк фактның төрле нигезләмәләре белән танышу да файдалы.

5 нче үзлек. ***Әгәр a, b, c, d — уңай саннар һәм a > b, b > d булса, ac > bd.***

Исбатлау. $a > b$ һәм $c > o$ булганлыктан, $ac > bc$ (3 нче үзлек буенча). Шулай ук $c > b$ һәм $b > o$ булганлыктан $cb > db$.

сүзлекчә

бер үк мәгънәле тигезсезлекләр

капма-каршы мәгънәле тигезсезлекләр

Шулай итеп, $ac > bc$, $bc > bd$. Ул чагында транзитивлык үзлеге буенча $ac > bd$.

Гадәттә, $a > b$, $c > d$ (яки $a < c$, $c < d$) рәвешендәге тигезсезлекләрне — **бер үк мәгънәле тигезсезлекләр** дип, ә $a > b$, $c < d$ тигезсезлекләрен **капма-каршы мәгънәле тигезсезлекләр** дип атыйлар. 5 нче үзлек буенча, ***уң һәм сул яклары уңай саннар булган бер үк мәгънәле тигезсезлекләрне тапкырлаганда, шул ук мәгънәле тигезсезлек килеп чыга.***

6 нчы үзлек. ***Әгәр a һәм b — тискәре булмаган саннар һәм*** $a > b$ ***булса,*** $a^n > b^n$, ***биредә n — теләсә нинди натураль сан.***

6 нчы үзлекнең мәгънәсе шуннан гыйбарәт: ***әгәр тигезсезлекнең ике ягы да тискәре булмаган саннар булса, тигезсезлек тамгасын үзгәртмичә, аларны бер үк натураль дәрәҗәгә күтәрергә мөмкин.***

6 нчы үзлеккә өстәмә. ***Әгәр n — так сан булса,*** $a > b$ ***тигезсезлегендәге теләсә нинди a һәм b саннары өчен шул ук мәгънәле*** $a^n > b^n$ ***тигезсезлеге килеп чыга.***

игътибар итегез

Алдагы исбатлауларда күбесенчә ике генә идеядән файдалануыбызга игътибар иткәнсездер. Беренче идея — тигезсезлекнең сул һәм уң якларының аермасын төзү һәм уңай яки тискәре сан килеп чыгуын ачыклау. Икенче идея — яңа үзлекне исбатлауда инде билгеле булган үзлекләрдән файдалану. Санлы тигезсезлекләрне исбатлауның башка очракларында да шулай эшлиләр. Мәсәлән, исбатлауларсыз гына санап үтелгән 2 һәм 6 нчы үзлекләрне шулай ук исбатларга мөмкин (моны үзегезгә эшләп карарга тәкъдим итәбез). Берничә мисал карап үтик.

1 нче мисал. a һәм b — уңай саннар һәм $a > b$. Исбатларга:

$$\frac{1}{a} < \frac{1}{b}.$$

Чишү. $\frac{1}{a} - \frac{1}{b}$ аермасын карыйбыз:

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b - a}{ab}.$$

Шарт буенча a, b, $a - b$ — уңай саннар. Димәк, $\frac{b - a}{ab}$ — тискәре сан, ягъни $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} < 0$. Моннан $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$. ■

2 нче мисал. a — уңай сан. Исбатларга:

$$a + \frac{1}{a} \geqslant 2.$$

Чишү. $\left(a + \frac{1}{a}\right) - 2$ аермасын карыйбыз:

$$\frac{a^2 + 1}{a} - 2 = \frac{a^2 - 2a + 1}{a} = \frac{(a - 1)^2}{a}.$$

Тискәре булмаган сан таптык, димәк, $a + \frac{1}{a} \geqslant 2$.

Әгәр $a = 1$ булса, $a + \frac{1}{a} = 2$; һәм $a \neq 1$ булса,

$$a + \frac{1}{a} > 2.$$

3 нче мисал. $2,1 < a < 2,2$; $3,7 < b < 3,8$ икәне билгеле.

Саннарны бәяләгез:

а) $2a$; б) $-3b$; в) $a + b$; г) $a - b$; д) a^2; е) b^3; ж) $\frac{1}{a}$.

Чишү. *а*) Икеле $2,1 < a < 2,2$ тигезсезлегенең барлык якларын да бер үк уңай 2 санына тапкырлап табабыз:

$$2 \cdot 2,1 < 2a < 2 \cdot 2,2, \text{ ягъни } 4,2 < 2a < 4,4.$$

б) Икеле $3,7 < b < 3,8$ тигезсезлегенең барлык якларын да бер үк тискәре -3 санына тапкырлап, капма-каршы мәгънәле тигезсезлек табабыз:

$$-3 \cdot 3,7 > -3b > -3 \cdot 3,8, \text{ ягъни } -11,4 < -3b < -11,1$$

($a > b > c$ рәвешле тигезсезлектән күбрәк кулланыла торган $c < b < a$ язылышына күчтек).

в) Бирелгән бер үк мәгънәле икеле тигезсезлекләрне буынлап кушып табабыз:

$$\begin{array}{r} + \begin{array}{l} 2,1 < a < 2,2 \\ 3,7 < b < 3,8 \end{array} \\ \hline 5,8 < a + b < 6,0 \end{array}$$

г) Икеле $3,7 < b < 3,8$ тигезсезлегенең барлык якларын да бер үк тискәре -1 санына тапкырлап, капма-каршы мәгънәле тигезсезлек табабыз:

$$-3,7 > -b > -3,8, \text{ ягъни } -3,8 < -b < -3,7.$$

Исәплибез:

$$\begin{array}{r} 2,1 < a < 2,2 \\ -3,8 < -b < -3,7 \\ \hline -1,7 < a - b < -1,5 \end{array}$$

д) Икеле $2,1 < a < 2,2$ тигезсезлегенең барлык яклары да уңай булганлыктан, квадратка күтәреп табабыз:

$$2,1^2 < a^2 < 2,2^2,$$

ягъни

$$4,41 < a^2 < 4,84.$$

е) Икеле $3,7 < b < 3,8$ тигезсезлегенең барлык якларын да кубка күтәреп табабыз:

$$3,7^3 < b^3 < 3,8^3,$$

ягъни

$$50,653 < b^3 < 54,872.$$

ж) Беренче мисалда a һәм b — уңай саннар булса, $a < b$ тигезсезлегеннән капма-каршы мәгънәле $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ тигезсезлеге чыгуын билгеләгән идек. Димәк, $2,1 < a < 2,2$ икеле тигезсезлегеннән табабыз:

$$\frac{1}{2,1} > \frac{1}{a} > \frac{1}{2,2},$$

ягъни

$$\frac{5}{11} < \frac{1}{a} < \frac{10}{21}.$$

4 нче мисал. a һәм b — тискәре булмаган саннар. Исбатларга:

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}.$$

Чишү. Тигезсезлекнең уң һәм сул яклары аермасын табабыз:

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2} = \frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}{2}.$$

Тискәре булмаган сан таптык, димәк, $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$.

Әгәр $a = b$ булса (ул чагында $\sqrt{a} = \sqrt{b}$, димәк, $\frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}{2} = 0$),

$\frac{a+b}{2} = \sqrt{ab}$; әгәр $a \neq b$ булса, $\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$.

сүзлекчә

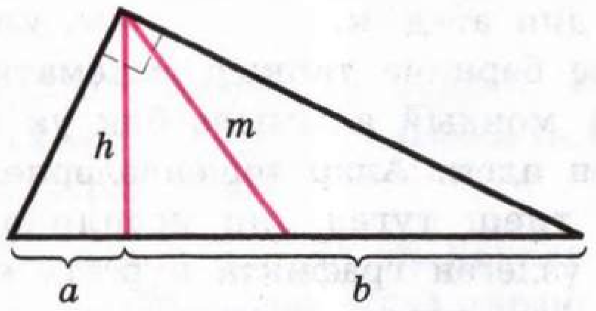
арифметик уртасы

геометрик уртасы

Коши тигезсезлеге

$\frac{a+b}{2}$ санын — a һәм b саннарының **арифметик уртасы** дип; $\sqrt{ab}$ санын a һәм b саннарының **геометрик уртасы** дип атыйлар. Шулай итеп, 4 нче мисалда исбатланган тигезсезлек ***тискәре булмаган ике санның арифметик уртасы аларның геометрик уртасыннан кечкенә түгел икәнлеген аңлата.*** Бу тигезсезлекне француз математигы Огюст Коши (1789–1857) хөрмәтенә кайвакыт **Коши тигезсезлеге** дип атыйлар.

Искәрмә 2. Коши тигезсезлегенең кызыклы гына геометрик аңлатмасы бар. Турыпочмаклы өчпочмакта туры почмак түбәсеннән төшерелгән h биеклеге гипотенузаны a һәм b кисемтәләренә бүлә дип алыйк (рәс. 106). Геометриядә $h = \sqrt{ab}$ икәнлеге исбатланган (бу аңлатма өчен «геометрик урта» атамасы очраклы түгел). Ә $\frac{a+b}{2}$ нәрсә икән? Бу — ярты гипотенуза озынлыгы. Әмма геометриядән билгеле, турыпочмаклы өчпочмакта туры почмак түбәсеннән үткәрелгән медиана m нәкъ менә гипотенузаның яртысына тигез. Шулай итеп, Коши тигезсезлеге гипотенузага үткәрелгән медиананың (ягъни $\frac{a+b}{2}$) гипотенузага үткәрелгән биеклектән (ягъни $\sqrt{ab}$) кечерәк түгел икәнен — ачыктан-ачык геометрик фактны аңлата.



Рәс. 106

Санлы тигезсезлекләрнең үзлекләре реаль саннарны зурлыклары буенча чагыштырырга, нәтиҗәне бәяләргә мөмкинлек бирә.

5 нче мисал. Саннарны чагыштырырга:

а) $\sqrt{3} + \sqrt{6}$ һәм $2 + \sqrt{5}$; б) $\pi + \sqrt{10}$ һәм $4 + \sqrt{11}$.

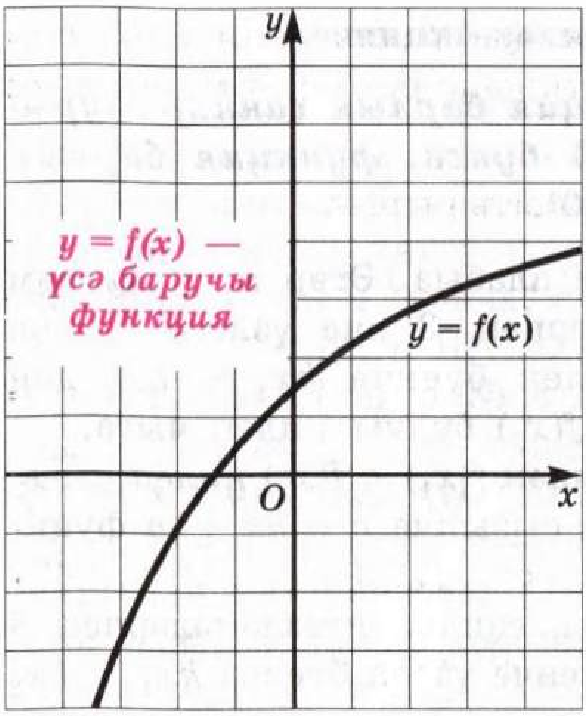
Чишү. а) $a = \sqrt{3} + \sqrt{6}$, $b = 2 + \sqrt{5}$ булсын. Ул вакытта $a^2 = (\sqrt{3} + \sqrt{6})^2 = (\sqrt{3})^2 + 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{6} + (\sqrt{6})^2 = 3 + 2\sqrt{18} + 6 = 9 + \sqrt{72}$; $b^2 = (2 + \sqrt{5})^2 = 4 + 4\sqrt{5} + 5 = 9 + \sqrt{80}$. Табабыз: $\sqrt{72} < \sqrt{80}$, $9 + \sqrt{72} < 9 + \sqrt{80}$, ягъни $a^2 < b^2$. Димәк, $a < b$.

б) $\pi < 4$, $\sqrt{10} < \sqrt{11}$ икәне билгеле. Бу ике бер үк мәгънәле тигезсезлеккә 4 нче үзлекне (буынлап кушу турында) кулланабыз: $\pi + \sqrt{10} < 4 + \sqrt{11}$. ■

§32. ФУНКЦИЯЛӘРНЕ МОНОТОНЛЫККА ТИКШЕРҮ

Үсә баручы һәм кими баручы функцияләр төшенчәсе белән без 7 нче сыйныфның алгебра курсында танышкан идек: функциянең графигына карап, без шундый нәтиҗәләр ясадык: әгәр график буенча сулдан уңга хәрәкәт итеп, шул ук вакытта астан өскә дә (тауга күтәрелгәндәй) хәрәкәтләнсәк, бу функцияне үсә баручы (рәс. 107) дип атадык; әгәр өстән аска таба хәрәкәтләнсәк (таудан төшкәндәй), бу функцияне кими баручы (рәс. 108) дип атадык.

Ләкин без инде берничә тапкыр математикларның функцияне тикшерүнең мондый алымына бик үк ышанып бетмәве турында сөйләшкән идек. Алар төшенчәләрнең билгеләмәләре рәсемгә таянырга тиеш түгел дип исәплиләр, сызым функциянең нindидер үзлеген графикта күрсәтү өчен генә кирәк. Функциянең үсүе һәм кимүе төшенчәләренә төгәлрәк билгеләмәләр бирик.



Рәс. 107

Рәс. 108

үсә баручы функция

кими баручы функция

Билгеләмә 1. Әгәр $x_1 < x_2$ тигезсезлегеннән, биредә x_1 һәм x_2 — X аралыгының теләсә нинди ике ноктасы, $f(x_1) < f(x_2)$ тигезсезлеге килеп чыкса, $y = f(x)$ функциясе X **аралыгында үсә баручы** дип атала.

Билгеләмә 2. Әгәр $x_1 < x_2$ тигезсезлегеннән, биредә x_1 һәм x_2 — X аралыгының теләсә нинди ике ноктасы, $f(x_1) > f(x_2)$ тигезсезлеге килеп чыкса, $y = f(x)$ функциясе X **аралыгында кими баручы** дип атала.

Гадәттә түбәндәге әйтелешләр уңайрак санала:

әгәр аргументның зуррак кыйммәтенә функциянең <u>зуррак</u> кыйммәте тиңдәш булса, функция үсә;

әгәр аргументның зуррак кыйммәтенә функциянең <u>кечерәк</u> кыйммәте тиңдәш булса, функция кими.

Бу билгеләмәләрдән һәм § 31 та каралган санлы тигезсезлекләрнең үзлекләреннән чыгып, алда өйрәнгән функцияләрнең үсүе яки кимүе турындагы нәтиҗәләрне дәлилли алабыз.

1. $y = kx + m$ сызыкча функциясе

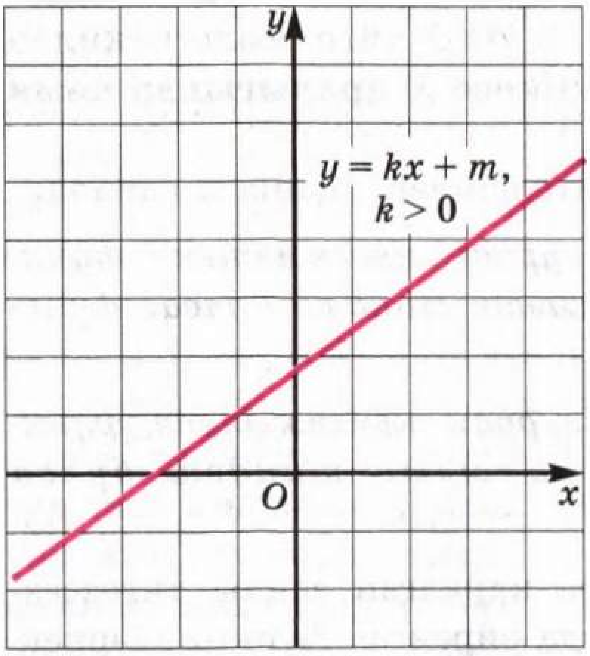
Әгәр $k > 0$ булса, функция барлык саннар турысында үсә (рәс. 109); ***әгәр $k < 0$ булса, функция барлык саннар турысында кими*** (рәс. 110).

Исбатлау. $f(x) = kx + m$ дип алабыз. Әгәр $x_1 < x_2$ һәм $k > 0$ булса, санлы тигезсезлекләрнең 3 нче үзлеге буенча (§ 31) $kx_1 < kx_2$. Һәм 2 нче үзлек буенча $kx_1 < kx_2$ дән $kx_1 + m < kx_2 + m$, ягъни $f(x_1) < f(x_2)$ булуы килеп чыга.

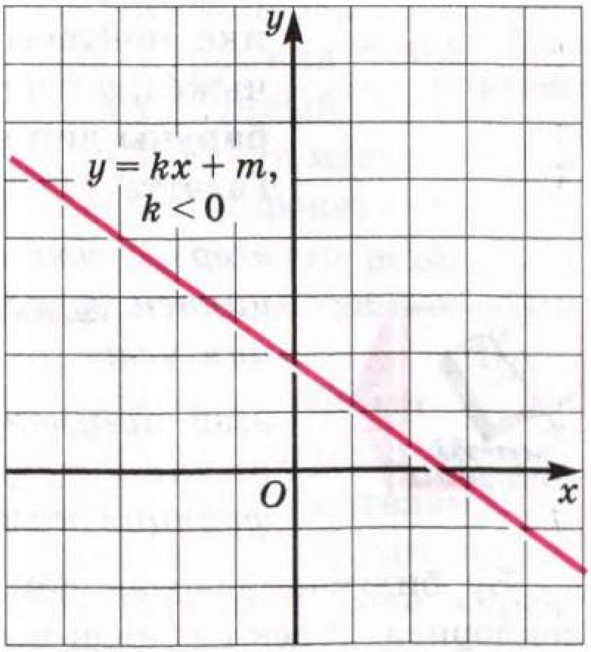
Шулай итеп, $x_1 < x_2$ тигезләмәсеннән $f(x_1) < f(x_2)$ килеп чыга. Бу исә $y = f(x)$ функциясенең, ягъни сызыкча $y = kx + m$ функциясенең үсүен аңлата.

Әгәр инде $x_1 < x_2$ һәм $k < 0$ булса, санлы тигезләмәләрнең 3 нче үзлеге буенча — $kx_1 > kx_2$, ә икенче үзлек буенча $kx_1 > kx_2$ дән $kx_1 + m > kx_2 + m$. Шулай итеп, $x_1 < x_2$ тигезсезлегеннән $f(x_1) > f(x_2)$. Бу исә $y = f(x)$ функциясенең, ягъни сызыкча $y = kx + m$ функциясенең кимүен аңлата.

Әгәр функция үзенең барлык билгеләнү өлкәсендә үсә (кими) икән, аны, аралыкны күрсәтмичә генә, үсә баручы (кими баручы) дип атарга мөмкин. Мәсәлән, $y = 2x - 3$ функциясе турында: ул барлык саннар турысында үсә, дип тә, $y = 2x - 3$ — үсә баручы функция, дип тә әйтергә мөмкин.

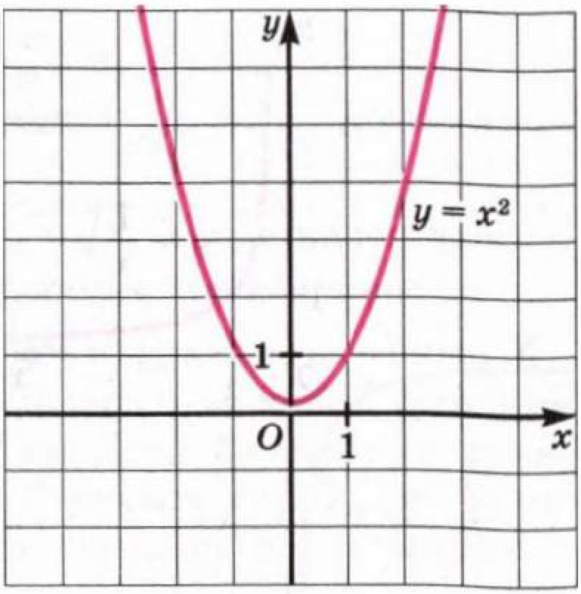


Рәс. 109



Рәс. 110

2. $y = kx^2$ функциясе



Рәс. 111

1. $y = x^2$ функциясен $[0; +\infty)$ нурында тикшерәбез; $f(x) = x^2$ дип алабыз. $0 \leqslant x_1 < x_2$ булсын. Санлы тигезсезлекләрнең 6 нчы үзлеге буенча, $x_1^2 < x_2^2$, ягъни $f(x_1) < f(x_2)$. Шулай итеп, $x_1 < x_2$ дән $f(x_1) < f(x_2)$ килеп чыга. Димәк, $y = x^2$ функциясе $[0; +\infty)$ нурында үсә (рәс. 111).

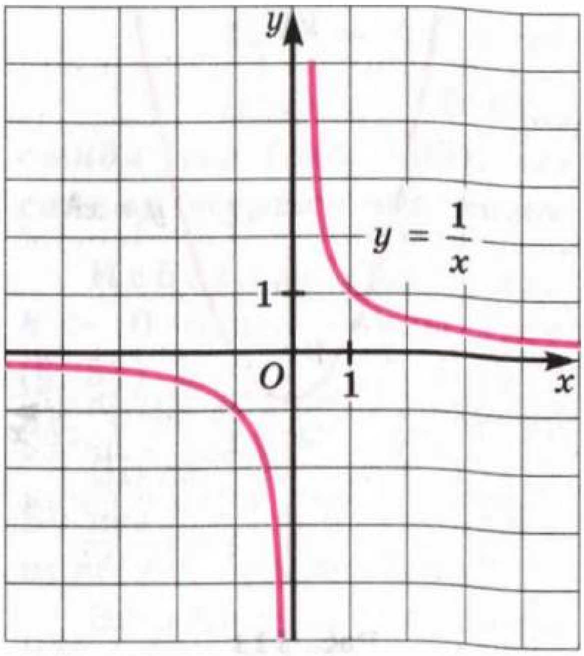
2. $y = x^2$ функциясен $(-\infty; 0]$ нурында тикшерәбез; $f(x) = x^2$ дип алабыз. $x_1 < x_2$ тигезсезлеге үтәлә торган тискәре булмаган x_1 һәм x_2 саннарын карыйк. Санлы тигезсезлекләрнең 3 нче үзлеге буенча $-x_1 > -x_2$ тигезсезлеге үтәлә. $-x_1$ һәм $-x_2$ саннары тискәре булмаганлыктан $-x_1 > -x_2$ тигезсезлегенең ике ягын да квадратка күтәрәбез һәм 6 нчы злек буенча шул ук мәгънәле тигезсезлек табабыз: $(-x_1)^2 > (-x_2)^2$, ягъни $x_1^2 > x_2^2$. Бу $f(x_1) > f(x_2)$ икәнен аңлата.

Шулай итеп, $x_1 < x_2$ тигезсезлегеннән $f(x_1) > f(x_2)$. Шуңа күрә $y = x^2$ функциясе $(-\infty; 0]$ нурында кими (рәс. 111).

Без $[0; +\infty)$ нурында $x_1 < x_2$ дән $x_1^2 < x_2^2$ килеп чыгуын күрдек. Әгәр $k > 0$ булса, $kx_1^2 < kx_2^2$; әгәр $k < 0$ булса, $kx_1^2 > kx_2^2$. Димәк, $y = kx^2$ функциясе $[0; +\infty)$ нурында $k > 0$ булганда үсә һәм $k < 0$ булганда кими. Шундый ук юл белән $y = kx^2$ функциясенең $(-\infty; 0]$ нурында $k > 0$ булганда кимүен һәм $k < 0$ булганда үсүен табабыз.

3. $y = \frac{k}{x}$ функциясе

1. $y = \frac{1}{x}$ функциясен $(0; +\infty)$ аралыгында карарбыз, $f(x) = \frac{1}{x}$ дип алабыз. Әйтик, $x_1 < x_2$ булсын. x_1 һәм x_2 — уңай саннар булганлыктан, $x_1 < x_2$ дән $\frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2}$ килеп чыга (§ 31 тан 1 нче мисалны кара), ягъни $f(x_1) > f(x_2)$.



Рәс. 112

Шулай итеп, $x_1 < x_2$ тигезсезлегеннән $f(x_1) > f(x_2)$. Бу $y = \frac{1}{x}$ функциясенең $(0; +\infty)$ ачык нурында кимүен күрсәтә (рәс. 112).

2. $y = \frac{1}{x}$ функциясен $(-\infty; 0)$ аралыгында тикшерәбез; $f(x) = \frac{1}{x}$ дип алабыз. $x_1 < x_2$ булсын, x_1 һәм x_2 — тискәре саннар. Ул вакытта $-x_1 > -x_2$, ә бу тигезсезлекнең ике ягы да уңай саннар һәм шунлыктан $\frac{1}{-x_1} < \frac{1}{-x_2}$ (без кабаттан § 31 тан 1 нче мисалга кайттык). Соңгы тигезсезлекнең ике ягын да -1 гә тапкырлап, $\frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2}$ не табабыз.

Шулай итеп, $x_1 < x_2$ тигезсезлегеннән $f(x_1) > f(x_2)$ икәнлеге килеп чыга, ягъни $y = \frac{1}{x}$ функциясе $(-\infty; 0)$ ачык нурында кими (рәс. 112).

Без $(0; +\infty)$ ачык нурында $x_1 < x_2$ дән $\frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2}$ килеп чыгуын күрдек. Әгәр $k > 0$ булса, $\frac{k}{x_1} > \frac{k}{x_2}$; әгәр $k < 0$ булса, $\frac{k}{x_1} < \frac{k}{x_2}$. Димәк, $y = \frac{k}{x}$ функциясе $(0; +\infty)$ ачык нурында $k > 0$ булса — кими, $k < 0$ булса — үсә. Шундый ук раслау $(-\infty; 0)$ ачык нурында да дөрес була: әгәр $k > 0$ булса, $y = \frac{k}{x}$ функциясе $(-\infty; 0)$ аралыгында кими; әгәр $k < 0$ булса, $y = \frac{k}{x}$ функциясе $(-\infty; 0)$ аралыгында үсә.

4. $y = \sqrt{x}$ функциясе

Әйтик, $0 \leqslant x_1 < x_2$ булсын. $\sqrt{x_1} < \sqrt{x_2}$ икәнлеген исбатларбыз. Киресе, ягъни $\sqrt{x_1} \geqslant \sqrt{x_2}$ дөрес дип фаразлыйк. Ул

чагында $\left(\sqrt{x_1}\right)^2 \geqslant \left(\sqrt{x_2}\right)^2$, ягъни $x_1 \geqslant x_2$, ә бу шартка каршы килә. Димәк, безнең фаразыбыз дөрес түгел, ә $\sqrt{x_1} < \sqrt{x_2}$ тигезсезлеге дөрес булып чыга.

Шулай итеп, $0 \leqslant x_1 < x_2$ дән $\sqrt{x_1} < \sqrt{x_2}$ икәне килеп чыкты. Бу исә $y = \sqrt{x}$ ның үсә баручы функция икәнен күрсәтә.

монотон функция

Гадәттә, «үсә баручы функция», «кими баручы функция» атамаларын **монотон функция** дигән уртак исем белән атап йөртәләр, ә функцияне үсә яки кими баручыга тикшерүне *функцияне монотонлыкка тикшерү* дип атыйлар.

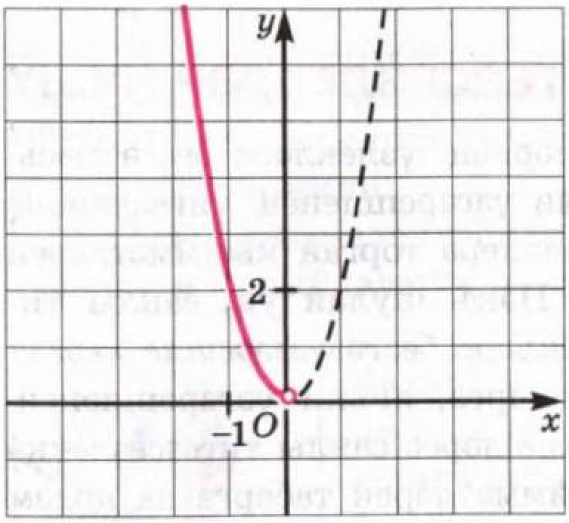
Мисал. $y=f(x)$ функциясенең графигын төзергә һәм укырга, биредә

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2, & x < 0 \text{ булганда;} \\ \sqrt{x}, & 0 \leqslant x \leqslant 4 \text{ булганда;} \\ \frac{8}{x}, & x > 4 \text{ булганда.} \end{cases}$$

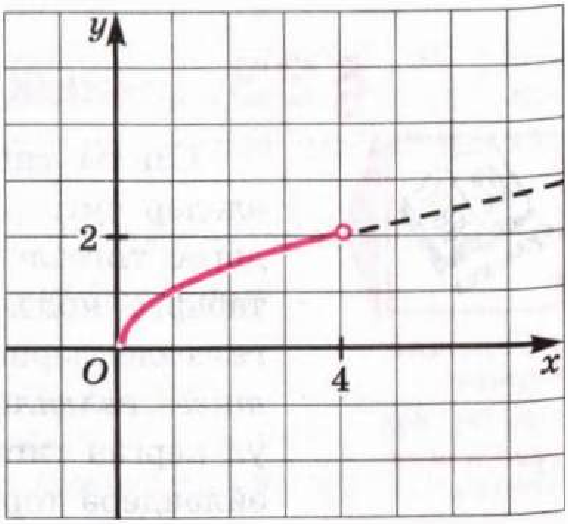
Чишү. 1) $y = 2x^2$ функциясенең графигын төзибез һәм бу параболаның $x < 0$ булгандагы тармагын алабыз (рәс. 113).

2) $y = \sqrt{x}$ функциясенең графигын төзибез һәм аның $[0; 4]$ кисемтәсендәге өлешен алабыз (рәс. 114).

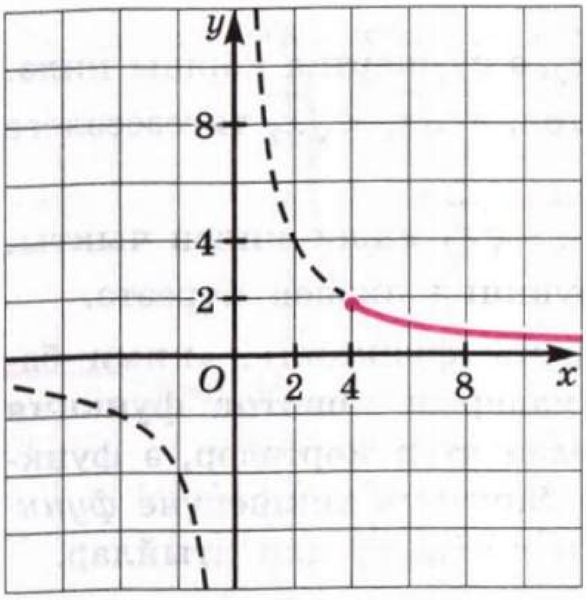
3) $y = \frac{8}{x}$ гиперболасын төзибез һәм аның $(4; +\infty)$ ачык нурындагы өлешен аерып алабыз (рәс. 115).



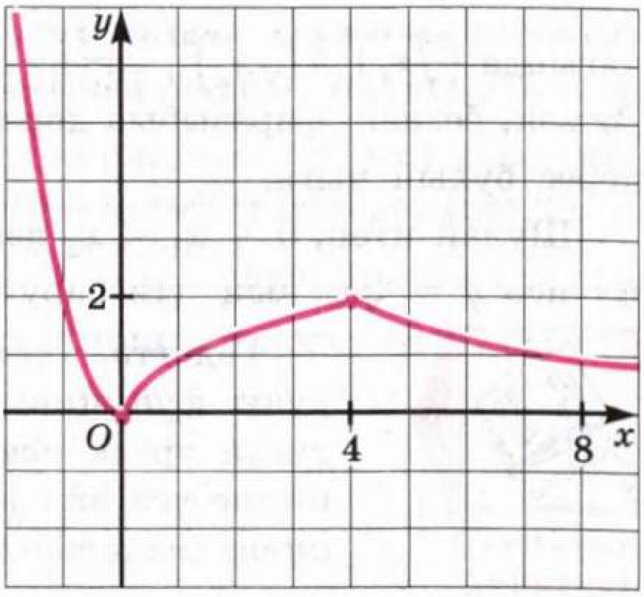
Рәс. 113



Рәс. 114



Рәс. 115



Рәс. 116

4) Барлык өч «кисәк»не бер үк координаталар системасында сурәтлибез — бу $y = f(x)$ функциясенең графигы була (рәс. 116).

$y = f(x)$ функциясенең графигын укыйбыз.

1. Функциянең билгеләнү өлкәсе — барлык саннар турысы.
2. $x = 0$ булганда, $y = 0$; $x > 0$ һәм $x < 0$ булганда, $y > 0$.
3. Функция $(-\infty; 0]$ нурында кими, $[0; 4]$ кисемтәсендә үсә, $[4; +\infty)$ нурында кими.
4. Функция астан чикләнгән, өстән чикләнмәгән.
5. $y_{min} = 0$ ($x = 0$ булганда), y_{max} булмый.
6. Функция өзлексез.
7. Функциянең кыйммәтләре күплеге — $[0; +\infty)$ нуры. ■

§ 33. СЫЗЫКЧА ТИГЕЗСЕЗЛЕКЛӘР ЧИШҮ

үзгәрешле кергән тигезсезлек

үзгәрешле кергән тигезсезлекне чишү

Санлы тигезләмәләрнең үзлекләре безгә мәсьәләләр чишәргә, ягъни үзгәрешленең тигезләмәне дөрес тигезлеккә әйләндерә торган кыйммәтләрен табарга ярдәм итте. Нәкъ шулай ук, санлы тигезсезлекләрнең үзлекләре безгә *үзгәрешле кергән тигезсезлекләрне* чишәргә, ягъни үзгәрешленең ул кергән тигезсезлекне дөрес санлы тигезсезлеккә әйләндерә торган кыйммәтләрен табарга да ярдәм итәчәк. Үзгәрешленең һәр шундый кыйммәтен,

гадәттә, **үзгәрешле кергән тигезсезлекнең чишелеше** дип атыйлар. Мәсәлән, шундый тигезсезлек карыйк:

$$2x + 5 < 7.$$

Биредә x урынына 0 кыйммәтен куйсак, $5 < 7$ не — дөрес тигезсезлек табабыз; димәк, $x = 0$ — бирелгән тигезсезлекнең чишелеше. Ә x урынына 1 кыйммәтен куеп, $7 < 7$ — дөрес булмаган тигезсезлек табабыз; шуңа күрә $x = 1$ — бу тигезсезлекнең чишелеше түгел. x урынына -3 кыйммәтен куеп, $-6 + 5 < 7$, ягъни $-1 < 7$ — дөрес тигезсезлек табабыз, димәк, $x = -3$ — бирелгән тигезсезлекнең чишелеше. x урынына 2,5 кыйммәтен куеп, $2 \cdot 2{,}5 + 5 < 7$ не, ягъни $10 < 7$ не — дөрес булмаган тигезсезлек табабыз. Димәк, $x = 2{,}5$ тигезсезлекнең чишелеше була алмый.

Хәзер сез аңладыгыз инде — бу бик уңышсыз юл, бер генә математик та тигезсезлекне болай чишмәячәк, чөнки *барлык саннарны* куеп карап булмый! Менә биредә инде санлы тигезсезлекләрнең үзлекләрен кулланырга кирәк булачак.

Безне x ның $2x + 5 < 7$ не дөрес санлы тигезсезлеккә әйләндерә торган кыйммәтләре кызыксындыра. Шул ук вакытта $2x + 5 - 5 < 7 - 5$ — шулай ук дөрес тигезсезлек (2 нче үзлек буенча тигезсезлекнең ике ягына да бер үк -5 санын куштык). Гадирәк рәвешле $2x < 2$ тигезсезлеген таптык. Аның ике ягын да уңай 2 санына бүлеп (3 нче үзлеккә нигезләндек), дөрес тигезсезлек $x < 1$ не табабыз.

Бу нәрсәне аңлата? Бу — тигезләмәнең чишелеше — 1 дән кечерәк булган теләсә нинди x саны дигән сүз. Мондый саннар $(-\infty;\ 1)$ ачык нурын тутыралар. Гадәттә, бу нур — $2x + 5 < 7$ *тигезсезлегенең чишелеше*, диләр (*чишелешләр күплеге* дип әйтү дөресрәк, әмма математиклар, һәрвакыттагыча, аз сүзле халык). Шулай итеп, бирелгән тигезсезлекнең чишелешен ике вариантта күрсәтергә мөмкин: $x < 1$ яки $(-\infty;\ 1)$.

Санлы тигезсезлекләрнең үзлекләре тигезсезлекләр чишкәндә түбәндәге кагыйдәләргә таяну мөмкинлеге бирә:

исегездә калдырыгыз

Кагыйдә 1. *Тигезсезлекнең теләсә кайсы буынын капма-каршы тамгасы белән тигезсезлекнең бер ягыннан икенчесенә чыгарырга була, бу вакытта тигезсезлек тамгасы үзгәрми.*

Кагыйдә 2. *Тигезсезлекнең ике ягын да бер үк уңай санга тапкырларга яки бүләргә мөмкин, бу вакытта тигезсезлекнең тамгасы үзгәрми.*

Кагыйдә 3. *Тигезсезлекнең ике ягын да бер үк тискәре санга тапкырларга яки бүләргә мөмкин, бу вакытта тигезсезлек тамгасы капма-каршыга үзгәрә.*

Бу кагыйдәләрне **сызыкча тигезсезлекләр**, ягъни $ax + b > 0$ (яки $ax + b < 0$) рәвешенә китерелә торган тигезсезлекләр чишүдә кулланырбыз, биредә a һәм b — теләсә нинди саннар, тик $a \neq 0$.

1 нче мисал. $3x - 5 \geqslant 7x - 15$ тигезләмәсен чишәргә.

Чишү. $7x$ буынын — тигезсезлекнең сул ягына, ә -5 буынын тигезсезлекнең уң ягына чыгарабыз, һәм бу вакытта $7x$ буынының да, -5 буынының да тамгаларын үзгәртәбез (1 нче кагыйдә буенча). Табабыз:

$$3x - 7x \geqslant -15 + 5, \text{ ягъни } -4x \geqslant -10.$$

Соңгы тигезсезлекнең ике ягын да бер үк тискәре -4 санына бүләбез, бу вакытта капма-каршы мәгънәле тигезсезлеккә күчүне онытырга ярамый (3 нче кагыйдәгә таянабыз). $x \leqslant 2{,}5$ не таптык. Бу — бирелгән тигезсезлекнең чишелеше.

Алда килешкәнчә, чишелешне язу өчен тиңдәш аралыкның санлы турыдагы билгеләнешен дә кулланырга мөмкин: $(-\infty; 2{,}5]$.

Җавап: $x \leqslant 2{,}5$, яки $(-\infty; 2{,}5]$.

Тигезләмәләрдәге кебек, тигезсезлекләрдә дә тигезкөчлелек төшенчәсе кертелгән. Әгәр $f(x) < g(x)$ һәм $r(x) < s(x)$ тигезсезлекләренең чишелешләре бер үк төрле булса (яки, аерым алганда, икесенең дә чишелеше булмаса), аларны **тигезкөчле** тигезсезлекләр дип атыйлар.

Гадәттә, тигезсезлек чишкәндә, бирелгән тигезсезлекне аңа тигезкөчле булган, әмма гадирәк тигезсезлек белән алыштырырга тырышалар. Мондый алыштыруны **тигезсезлекне тигезкөчле рәвешүзгәртү** дип атыйлар. Бу рәвешүзгәртүләр нәкъ менә алда әйтелгән 1–3 нче кагыйдәләрдә күрсәтелде.

сызыкча тигезсезлек

тигезкөчле тигезсезлекләр

тигезсезлекне тигезкөчле рәвешүзгәрту

2 **нче мисал.** Тигезсезлекне чишәргә:

$$\frac{x}{3} + \frac{2x-1}{5} > 2x - \frac{1}{15}.$$

Чишү. Тигезсезлек тамгасын үзгәрешсез калдырып, аның ике ягын да бер үк уңай 15 санына тапкырлыйбыз (2 нче кагыйдә). Бу безгә ваклаучыдан котылырга, ягъни бирелгәненә тигезкөчле булган гадирәк тигезсезлеккә күчү мөмкинлеге бирә:

$$15\left(\frac{x}{3} + \frac{2x-1}{5}\right) > 15\left(2x - \frac{1}{15}\right);$$

$$5x + 3(2x - 1) > 30x - 1;$$

$$5x + 6x - 3 > 30x - 1;$$

$$11x - 3 > 30x - 1.$$

Соңгы тигезсезлек өчен 1 нче кагыйдәне кулланып, аңа тигезкөчле булган гадирәк тигезсезлек табабыз:

$$11x - 30x > -1 + 3;$$

$$-19x > 2.$$

Ниһаять, 3 нче кагыйдәгә нигезләнеп, $x < -\frac{2}{19}$.

Җавап: $x < -\frac{2}{19}$, яки $\left(-\infty; -\frac{2}{19}\right)$.

Санлы тигезсезлекләрнең үзлекләрен кулланып, без бу параграфта үзгәрешле кергән теләсә нинди тигезсезлекләрне чишәргә өйрәндек дип әйтә алмыйбыз, без бары тик иң гади рәвешүзгәртүләр ясаганнан соң $ax > b$ ($>$ тамгасыннан тыш, тигезсезлекнең катгый һәм катгый булмаган теләсә кайсы тамгасы тора ала) рәвешенә китерелә торганнарын гына чишә алабыз. Киләсе параграфта квадрат тигезсезлекләрне чишәргә өйрәнербез.

§ 34. КВАДРАТ ТИГЕЗСЕЗЛЕКЛӘР ЧИШҮ

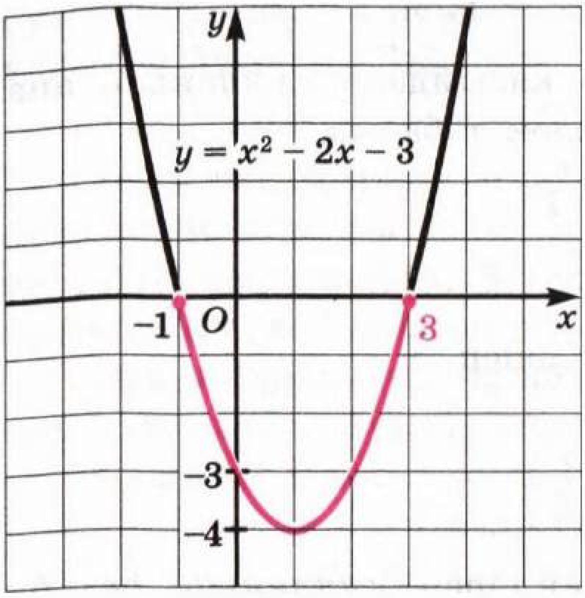
квадрат тигезсезлек

Квадрат тигезсезлек дип $ax^2 + bx + c > 0$, биредә $a \neq 0$ рәвешендәге тигезләмәләрне атыйлар ($>$ тамгасыннан тыш башка тигезсезлек тамгасы да була ала). Мондый тигезсезлекләр чишү өчен теоретик материалларның бездә җитәрлек икәненә хәзер ышанырбыз.

1 нче мисал. Тигезләмәне чишәргә:

а) $x^2 - 2x - 3 > 0$; в) $x^2 - 2x - 3 \geqslant 0$;

б) $x^2 - 2x - 3 < 0$; г) $x^2 - 2x - 3 \leqslant 0$.



Рәс. 117

Чишү. а) 117 нче рәсемдә сурәтләнгән $y = x^2 - 2x - 3$ параболасын карыйбыз. $x^2 - 2x - 3 > 0$ тигезсезлеген чишү — x ның нинди кыйммәтләрендә парабола нокталарының ординаталары уңай дигән сорауга җавап бирү дигән сүз. Рәсемнән $x < -1$ яки $x > 3$ булган вакытта $y > 0$, ягъни функция графигының x күчәреннән өстә ятканын күрәбез. Димәк, тигезсезлекнең чишелешләре булып $(-\infty; -1)$ ачык нурындагы һәм $(3; +\infty)$ ачык нурындагы барлык нокталар хезмәт итә. Күплекләрне берләштерү $\cup$ тамгасын кулланып, җавапны $(-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$ дип язабыз. Хәер, җавапны $x < -1$; $x > 3$ дип тә язарга мөмкин.

б) $x^2 - 2x - 3 < 0$ тигезсезлеген (яки $y < 0$, биредә $y = x^2 - 2x - 3$), шулай ук 117 нче рәсем ярдәмендә чишәргә була: график $-1 < x < 3$ булганда, x күчәреннән аста ята. Шуңа күрә бу тигезсезлекнең чишелешләре булып $(-1; 3)$ интервалының барлык нокталары тора.

в) $x^2-2x-3\geqslant 0$ тигезсезлеге $x^2-2x-3>0$ тигезсезлегеннән бик аз аерыла: җавапка $x^2-2x-3=0$ тигезләмәсенең тамырларын да, ягъни $x=-1$ һәм $x=3$ нокталарын да кертергә кирәк. Шулай итеп, әлеге катгый булмаган тигезсезлекнең тамырлары булып $(-\infty;\ -1]$ нурының барлык нокталары һәм $[3;\ +\infty)$ нурының барлык нокталары тора.

г) $x^2-2x-3\leqslant 0$ тигезсезлеге дә $x^2-2x-3<0$ тигезсезлегеннән җавапка $x^2-2x-3=0$ тигезләмәсенең тамырларын, ягъни $x=-1$ һәм $x=3$ не керту белән генә аерыла. Димәк, әлеге катгый булмаган тигезсезлекнең чишелешләре булып $[-1;\ 3]$ кисемтәсенең барлык нокталары тора. ◼

игътибар итегез

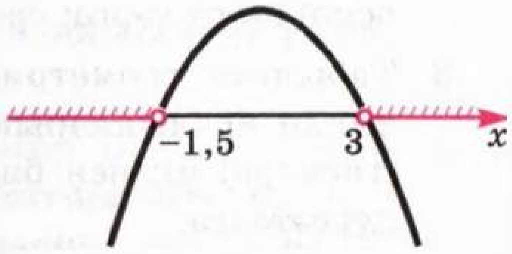
Ә математиклар бу очракта болай диләр: нигә безгә $ax^2+bx+c>0$ тигезсезлеген чишкәч, параболаны — $y=ax^2+bx+c$ квадратик функциясенең графигын матурлап төзеп утырырга (1 нче мисалдагы кебек)? Моның өчен бары квадрат өчбуынның тамырларын (параболаның x күчәре белән кисешү нокталары) табып, парабола тармакларының кая (аска яки өскә) юнәлешен генә белү дә җитә — графикны схематик рәвештә дә күрсәтеп була. Әлеге схематик сурәт (хәтта сызымда y күчәрен ясап тору да кирәкми) тигезсезлекнең чишелешен җиңел аңлата.

2 нче мисал. $-2x^2+3x+9<0$ тигезсезлеген чишәргә.

Чишү. 1) $-2x^2+3x+9$: $x_1=3$, $x_2=-1{,}5$ квадрат өчбуынының тамырларын табабыз.

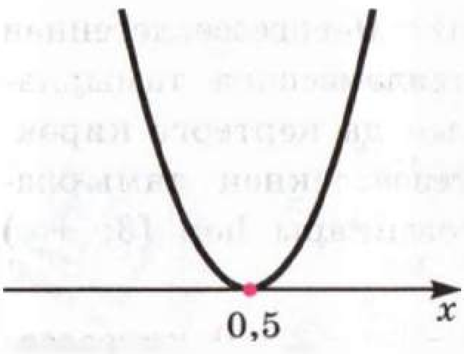
2) $y=-2x^2+3x+9$ функциясенең графигы булып торган парабола x күчәрен 3 һәм $-1{,}5$ нокталарында кисеп үтә, ә параболаның тармаклары аска юнәлгән, чөнки өлкән коэффициент — тискәре сан, -2. 118 нче рәсемдә графикның сурәте бирелгән.

3) 118 нче рәсемнән нәтиҗә ясыйбыз: график x күчәреннән аста урнашкан аралыкларда, ягъни $(-\infty;\ -1{,}5)$ ачык нурында яки $(3;\ +\infty)$ ачык нурында $y<0$ була.



Рәс. 118

Җавап: $x<-1{,}5$; $x>3$.



Рәс. 119

3 нче мисал. $4x^2 - 4x + 1 \leqslant 0$ тигезсезлеген чишәргә.

Чишү. 1) $4x^2 - 4x + 1 = 0$ тигезләмәсеннән $x_{1,2} = \frac{1}{2}$.

2) Квадрат өчбуынның бер тамыры бар — $x = \frac{1}{2}$; бу — әлеге квадрат өчбуынның графигы булып торучы парабола x күчәрен кисми, ә аңа $x = \frac{1}{2}$ ноктасында *орына* дигән сүз. Параболаның тармаклары өскә юнәлгән (рәс. 119).

3) 118 нче рәсемдәге геометрик модель ярдәмендә бирелгән тигезсезлекнең бары тик $x = \frac{1}{2}$ ноктасында гына үтәлүен күрәбез, чөнки x ның башка барлык кыйммәтләрендә дә графикның ординатлары уңай.

Җавап: $x = \frac{1}{2}$.

Сез, мөгаен, искәргәнсездер, 1, 2, 3 нче мисалларда квадрат тигезсезлекләр чишүнең билгеле бер алгоритмы файдаланылды, хәзер шуны формалаштырабыз.

$ax^2 + bx + c > 0$ ($ax^2 + bx + c < 0$)
квадрат тигезсезлеген чишү алгоритмы

1. $ax^2 + bx + c$ квадрат өчбуынының тамырларын табарга.
2. Табылган тамырларны x күчәрендә тамгаларга һәм $y = ax^2 + bx + c$ функциясенең графигы булып торучы парабола тармакларының кая юнәлгәнен (аска яки өскә) билгеләргә; графикның сурәтен ясарга.
3. Табылган геометрик модель ярдәмендә x күчәренең нинди аралыкларында график ординаталарының уңай (тискәре) икәнен билгеләргә; бу аралыкларны җавапта күрсәтергә.

Әлеге алгоритмның беренче адымында квадрат өчбуынның тамырларын табу таләп ителә. Ә бит тамырлар булмаска да мөмкин; бу очракта нишләргә? Бу вакытта алгоритмны кулланып булмый, башкача фикер йөртергә кирәк. Түбәндәге теоремалар нинди дер фикергә юнәлтер дип уйлыйбыз.

Теорема 1 ***Әгәр $ax^2 + bx + c$ квадрат өчбуынының тамырлары булмаса, (ягъни аның дискриминанты D — тискәре сан) һәм бу вакытта $a > 0$ булса, x ның барлык кыйммәтләрендә***

$$ax^2 + bx + c > 0$$ ***тигезлеге үтәлә.***

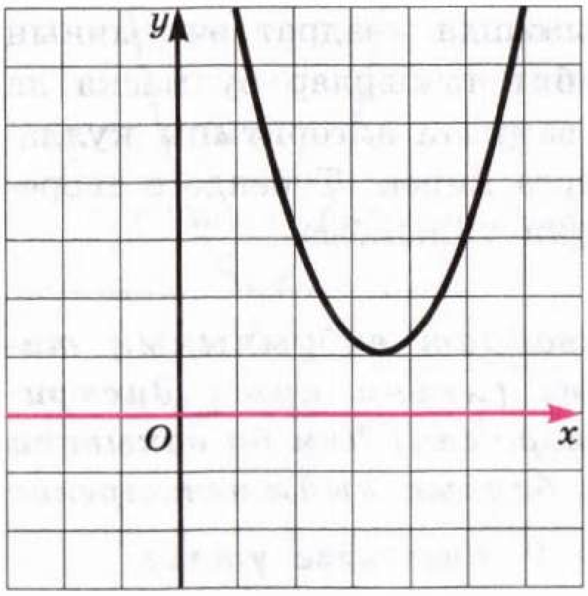
Башкача әйтсәк, әгәр $D < 0$, $a > 0$ булса, $ax^2 + bx + c > 0$ тигезсезлеге барлык x лар өчен дә үтәлә; киресенчә, $ax^2 + bx + c \leqslant 0$ тигезсезлегенең тамырлары булмый.

Исбатлау. $y = ax^2 + bx + c$ функциясенең графигы булып, тармаклары өскә (чөнки $a > 0$) юнәлгән һәм, шарт буенча квадрат өчбуынның тамырлары булмаганлыктан, x күчәрен кисеп үтми торган парабола тора. Графигы 120 рәсемдә күрсәтелгән. Күргәнебезчә, барлык x ларда график x күчәреннән өстәрәк урнашкан, ә бу барлык x ларда да $ax^2 + bx + c > 0$ тигезсезлеге үтәлә дигән сүз, шуны исбатларга кирәк иде.

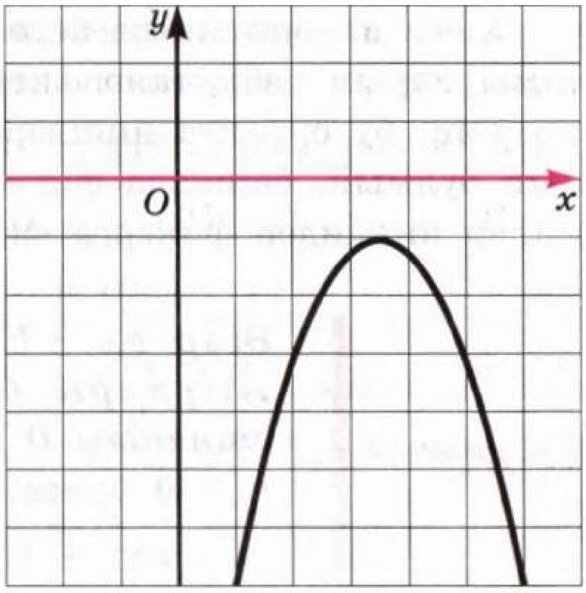
Теорема 2 ***Әгәр $ax^2 + bx + c$ квадрат өчбуынының тамырлары булмаса, (ягъни аның дискриминанты D — тискәре сан) һәм бу вакытта $a < 0$ булса, x ның барлык кыйммәтләрендә***

$$ax^2 + bx + c < 0$$ ***тигезлеге үтәлә.***

Башкача әйтсәк, әгәр $D < 0$, $a < 0$ булса, $ax^2 + bx + c < 0$ тигезсезлеге барлык x лар өчен дә үтәлә; киресенчә, $ax^2 + bx + c \geqslant 0$ тигезсезлегенең тамырлары булмый.



Рәс. 120



Рәс. 121

Исбатлау. $y = ax^2 + bx + c$ функциясенең графигы булып, тармаклары өскә (чөнки $a < 0$) юнәлгән һәм, шарт буенча квадрат өчбуынның тамырлары булмаганлыктан, x күчәрен кисеп үтми торган парабола тора. Графигы 120 нче рәсемдә күрсәтелгән. Күргәнебезчә, барлык x ларда график x күчәреннән өстәрәк урнашкан, ә бу барлык x ларда да $ax^2 + bx + c < 0$ тигезсезлеге үтәлә дигән сүз, шуны исбатларга кирәк иде.

4 нче мисал. Тигезсезлекне чишәргә:
а) $2x^2 - x + 4 > 0$; б) $-x^2 + 3x - 8 \geqslant 0$.

Чишү. а) $2x^2 - x + 4$ квадрат өчбуынының дискриминантын табабыз. $D = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 4 = -31 < 0$. Өчбуынның өлкән коэффициенты (2 саны) — уңай. Димәк, 1 нче теорема буенча барлык x ларда да $2x^2 - x + 4 > 0$ тигезсезлеге үтәлә, ягъни бирелгән тигезсезлекләрнең чишелеше булып саннар турысы $(-\infty; +\infty)$ тора.

б) $-x^2 + 3x - 8$ квадрат өчбуынының дискриминантын табабыз. $D = 3^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-8) = -23 < 0$. Өчбуынның өлкән коэффициенты (−1 саны) тискәре. Димәк, 2 нче теорема буенча барлык x ларда да $-x^2 + 3x - 8 < 0$ тигезсезлеге үтәлә. Ә $-x^2 + 3x - 8 \geqslant 0$ тигезсезлеге xның бер генә кыйммәтендә дә үтәлми, ягъни бирелгән тигезсезлекнең чишелеше юк.

Җавап: а) $(-\infty; +\infty)$; б) чишелеше юк.

Алдагы мисалда квадрат тигезләмәләрне чишкәндә кулланыла торган тагын бер фикер белән танышырбыз.

5 нче мисал. $3x^2 - 10x + 3 < 0$ тигезсезлеген чишәргә.

Чишү. $3x^2 - 10x + 3$ квадрат өчбуынын тапкырлаучыларга таркатабыз. Өчбуынның тамырлары — 3 һәм $\frac{1}{3}$ саннары, шунлыктан түбәндәге формуланы кулланабыз:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$$

табабыз

$$3x^2 - 10x + 3 = 3(x - 3)\left(x - \frac{1}{3}\right).$$

Саннар турысында өчбуынның тамырларын: 3 һәм $\frac{1}{3}$ не билгелибез (рәс. 122). Әйтик, $x > 3$ булсын ди; ул вакытта $x - 3 > 0$ һәм $x - \frac{1}{3} > 0$, димәк, $3(x-3)\left(x - \frac{1}{3}\right)$ тапкырчыгышы да уңай. Хәзер $\frac{1}{3} < x < 3$ булсын, ул вакытта $x - 3 < 0$, ә $x - \frac{1}{3} > 0$. Димәк, $3(x-3)\left(x - \frac{1}{3}\right)$ тапкырчыгышы тискәре. Һәм инде $x < \frac{1}{3}$ булсын, ул чагында $x - 3 < 0$ һәм $x - \frac{1}{3} < 0$. Ә инде бу вакытта $3(x-3)\left(x - \frac{1}{3}\right)$ тапкырчыгышы уңай була.

Рәс. 122

Фикерләүләрдән чыгып, нәтиҗә ясыйбыз: $3x^2 - 10x + 3$ квадрат өчбуынының тамгалары 122 нче рәсемдә күрсәтелгәнчә була. Ә безне x нинди булганда квадрат өчбуынның тискәре кыйммәтләр алуы кызыксындыра. 122 нче рәсемнән нәтиҗә ясыйбыз: $3x^2 - 10x + 3$ квадрат өчбуыны x ның $\left(\frac{1}{3}; 3\right)$ интервалындагы теләсә нинди кыйммәтендә тискәре кыйммәтләр ала.

Җавап: $\left(\frac{1}{3}; 3\right)$ яки $\frac{1}{3} < x < 3$.

алдарак белерсез

Искәрмә. Без 5 нче мисалда кулланган фикерләү алымын, гадәттә, интерваллар алымы (яки аралыклар алымы) дип атыйлар. Ул мате-математикада рациональ тигезсезлекләр чишүдә актив кулланыла. 9 нчы сыйныфта интерваллар алымын җентеклəбрәк өйрәнербез.

6 нчы мисал. Параметр p ның нинди кыйммәтләрендә $x^2 - 5x + p^2 = 0$ тигезләмәсенең:

а) төрле ике тамыры була; б) бер тамыры була; в) тамырлары булмый?

Чишү. Квадрат тигезләмәнең тамырлары саны аның дискриминанты D тамгасына бәйләнгән. Бу очракта $D = 25 - 4p^2$.

Рәс. 123

а) $D > 0$ булганда, квадрат тигезләмәнең төрле ике тамыры була, димәк, мәсьәлә $25 - 4p^2 > 0$ тигезсезлеген чишүгә кайтып кала. Бу тигезсезлекнең ике ягын да -1 гә тапкырлыйбыз (тигезсезлек тамгасын үзгәртергә онытмагыз!). Тигез көчле $4p^2 - 25 < 0$ тигезсезлеге табыла. Үзгәртәбез: $4(p - 2{,}5)(p + 2{,}5) < 0$. $4(p - 2{,}5)(p + 2{,}5)$ аңлатмасының тамгалары 123 нче рәсемдә күрсәтелгән. Нәтиҗә ясыйбыз: $4(p - 2{,}5)(p + 2{,}5) < 0$ тигезсезлеге p ның $(-2{,}5;\ 2{,}5)$ интервалындагы барлык кыйммәтләре өчен дә үтәлә. Нәкъ менә p параметрының шушы кыйммәтләрендә квадрат тигезләмәнең төрле ике тамыры була.

б) Әгәр $D = 0$ булса, квадрат тигезләмәнең бер тамыры була. Алдарак әйтелгәнчә, $p = 2{,}5$ яки $p = -2{,}5$ булганда, $D = 0$. Параметр p ның нәкъ менә шушы кыйммәтләрендә квадрат тигезләмәнең бер генә тамыры була.

в) $D < 0$ булса, квадрат тигезләмәнең тамырлары булмый. $25 - 4p^2 < 0$ тигезсезлеген чишәбез:

$$4p^2 - 25 > 0;$$

$$4(p - 2{,}5)(p + 2{,}5) > 0,$$

моннан (123 нче рәсемне кара) $p < -2{,}5$, $p > 2{,}5$. Параметр p ның шушы кыйммәтләрендә тигезләмәнең тамырлары булмый.

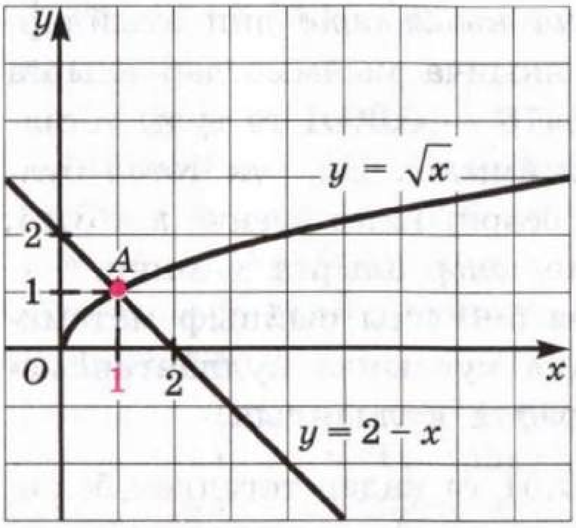
Җавап: а) $-2{,}5 < p < 2{,}5$ булганда;

б) $p = 2{,}5$ яки $p = -2{,}5$ булганда;

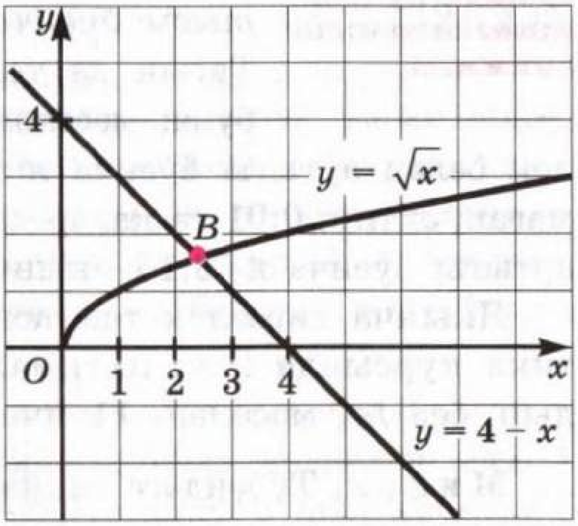
в) $p < -2{,}5$ яки $p > 2{,}5$ булганда.

§ 35. РЕАЛЬ САННАРНЫҢ ЯКЫНЧА КЫЙММӘТЛӘРЕ

7 нче һәм 8 нче сыйныфларда без тигезләмәләрне график юл белән еш чиштек. Игътибар иткәнсездер, барлык мисалларда да диярлек тигезләмә «әйбәт» тамырлар ала иде. Болар шакмаклы дәфтәрдә бигрәк тә уңай табыла торган бөтен саннар була иде. Әмма күбрәк очракларда башкачарак була.



Рәс. 124



Рәс. 125

Ике тигезләмә $\sqrt{x} = 2 - x$ һәм $\sqrt{x} = 4 - x$ ны карыйбыз. Беренче тигезләмәнең бердәнбер тамыры $x = 1$ бар, чөнки $y = \sqrt{x}$ һәм $y = 2 - x$ функцияләренең графиклары бер $A(1; 1)$ ноктасында кисешәләр (рәс. 124). Икенче очракта $y = \sqrt{x}$ һәм $y = 4 - x$ функцияләренең графиклары шулай ук бер B ноктасында кисешәләр (рәс. 125), әмма аның координаталары «начаррак». Сызымнан файдаланып, B ноктасының абсциссасын якынча 2,5 кә тигез дип нәтиҗә ясый алабыз. Мондый очракларда тигезләмәнең төгәл чишелеше түгел, ә якынча чишелеше турында сүз алып баралар һәм $x \approx 2{,}5$ дип язалар.

Математикларның реаль санның кыйммәте төшенчәсен кертүенә китергән сәбәпләрнең берсе менә шушы. Икенче сәбәп, бәлки, тагын да мөһимрәктер әле. Реаль сан нәрсә ул?

төгәллек белән киме буенча алынган якынча кыймәт

төгәллек белән артыгы буенча алынган якынча кыймәт

Ул — чиксез унарлы вакланма. Ләкин чиксез унарлы вакланмалар белән исәпләүләр ясау уңайсыз, шуңа күрә тормышта реаль саннарның якынча кыйммәтләрен кулланалар. Мәсәлән, $\pi = 3{,}141592...$ саны өчен якынча тигезлек $\pi \approx 3{,}141$ яки $\pi \approx 3{,}142$ кулланыла. Беренчесен π санының 0,001 гә кадәр *төгәллек белән киме буенча алынган якынча кыйммәте*; икенчесен π санының 0,001 гә кадәр *төгәллек белән артыгы буенча якынча кыйммәте* дип атыйлар. Тагын да төгәлрәк якынча кыйммәтләр алырга була: мәсәлән, $\pi \approx 3{,}1415$ — 0,0001 гә тулы төгәллек белән артыгы буенча якынча кыйммәте. Бик үк төгәл булмаган, әйтик, 0,01 гә кадәр төгәллек белән: киме буенча $\pi \approx 3{,}14$, артыгы буенча $\pi \approx 3{,}15$ якынча кыйммәтләр алырга мөмкин.

Якынча тигезлек тамгасын $\approx$ сез 5–6 нчы сыйныф математика курсында һәм, ихтимал, физика курсында кулланганcыздыр, без дә, мәсәлән, 11 нче параграфта кулландык.

Мисал. Түбәндәге саннарның 0,01 гә кадәр төгәллек белән киме буенча һәм артыгы буенча якынча кыйммәтләрен табарга:

а) $\sqrt{5}$; б) $2 + \sqrt{5}$; в) $\frac{7}{22}$.

Чишү. а) Безгә $\sqrt{5} = 2{,}236...$ (§ 11) икәнлеге билгеле, димәк, $\sqrt{5} \approx 2{,}23$ — 0,01 гә кадәр төгәллек белән киме буенча якынча кыйммәт; $\sqrt{5} \approx 2{,}24$ — 0,01 гә кадәр төгәллек белән артыгы буенча якынча кыйммәт.

б) $2 + \sqrt{5} = 2{,}000... + 2{,}236... = 4{,}236...$. Димәк, $2 + \sqrt{5} \approx$ $\approx 4{,}23$ — 0,01 гә кадәр төгәллек белән киме буенча якынча кыйммәт, $2 + \sqrt{5} \approx 4{,}24$ — 0,01 гә кадәр төгәллек белән артыгы буенча якынча кыйммәт.

в) $\frac{7}{22} = 0{,}31818...$ (§ 9). Шулай итеп, $\frac{7}{22} \approx 0{,}31$ — 0,01 гә кадәр төгәллек белән киме буенча якынча кыйммәт, $\frac{7}{22} \approx 0{,}32$ — 0,01 гә кадәр төгәллек белән артыгы буенча якынча кыйммәт.

Киме буенча һәм артыгы буенча якынча кыйммәт табуны санны *түгәрәкләү* дип тә атыйлар.

абсолют хата

<u>*Билгеләмә*</u>. **Якынчалыкның хатасы (абсолют хата)** дип x зурлыгының төгәл кыйммәте белән якынча a кыйммәте арасындагы аерманың модулен атыйлар: якынчалыкның хатасы — $|x - a|$.

Мәсәлән, $\pi \approx 3{,}141$ яки $\pi \approx 3{,}142$ якынча тигезлегенең хатасы $|\pi - 3{,}141|$ дип, яки, тиңдәшле рәвештә, $|\pi - 3{,}142|$ дип билгеләнә.

Урынлы сорау туа: кайсы якынчалык яхшырак, киме белән алынганымы, артыгы беләнме, ягъни, кайсы очракта хата кечерәк? Бу, билгеле, якынчасы исәпләнергә тиешле конкрет санның үзенә бәйләнгән. Гадәттә, чиксез унарлы вакланма рәвешендәге уңай санны түгәрәкләгәндә, түбәндәге кагыйдәне кулланалар.

Түгәрәкләү кагыйдәсе. *Әгәр төшереп калдырыла торган беренче цифр 5 тән кечерәк булса, якынча кыйммәтне — киме белән, ә төшереп калдырыла торган беренче цифр 5 тән зуррак булса, артыгы белән алалар.*

Бу кагыйдәне бу параграфта каралган барлык саннарга карата кулланыйк; тикшерелгән саннар өчен хатасы кечерәк булган якынча кыйммәтләрне сайлап алабыз.

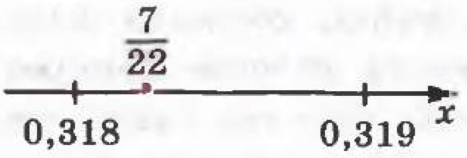
1) $\pi = 3{,}141592...$ $0{,}001$ гә кадәр төгәллек белән $\pi \approx 3{,}142$; биредә төшереп калдырыла торган беренче цифр 5 кә тигез (өтердән соң дүртенче урында), шуңа күрә якынча кыйммәтне артыгы белән алдык. $0{,}0001$ гә кадәр төгәллек белән $\pi \approx 3{,}1416$ — монысында да артыгы белән алдык, чөнки төшереп калдырыла торган беренче цифр (өтердән соң бишенче урында) 9 га тигез. Ә менә $0{,}01$ гә кадәр төгәллек белән якынча кыйммәтне киме буенча алырга кирәк: $\pi \approx 3{,}14$.

2) $\sqrt{5} = 2{,}236...$ $0{,}01$ гә кадәр төгәллек белән $\sqrt{5} \approx 2{,}24$ (якынча кыйммәт артыгы буенча алына).

3) $2 + \sqrt{5} = 4{,}236...$ 0,01 гә кадәр төгәллек белән $2 + \sqrt{5} \approx$ $\approx 4{,}24$ (артыгы буенча алынган якынча кыйммәт).

4) $\frac{7}{22} = 0{,}31818...$ 0,001 гә кадәр төгәллек белән $\frac{7}{22} \approx 0{,}318$ (киме буенча алынган якынча кыйммәт).

Соңгы мисалны җентекләбрәк тикшерик. Координаталар турысының зурайтылган бер кисәген алабыз (рәс. 126). $\frac{7}{22}$ ноктасы [0,318; 0,319] кисемтәсендә ята, димәк, аның кисемтә очларыннан ераклыклары кисемтә озынлыгыннан зур түгел.



Рәс. 126

$\frac{7}{22}$ ноктасының кисемтә очларыннан ераклыклары тиңдәшле рәвештә $\left|\frac{7}{22} - 0{,}318\right|$, $\left|\frac{7}{22} - 0{,}319\right|$ була, ә [0,318; 0,319] кисемтәсенең озынлыгы 0,001 гә тигез. Димәк,

$$\left|\frac{7}{22} - 0{,}318\right| \leqslant 0{,}001 \text{ һәм } \left|\frac{7}{22} - 0{,}319\right| \leqslant 0{,}001.$$

Шулай итеп, ике очракта да ($\frac{7}{22}$ санының киме буенча һәм артыгы буенча алынган якынча кыйммәтләре өчен) хата 0,001 дән артмый.

Әлегә кадәр без 0,01 гә кадәр төгәллек, 0,001 гә кадәр һ.б. дип сөйләштек. Хәзер исә бу әйтемне бераз үзгәртербез.

Әгәр a — x санының якынча кыйммәте һәм $|x - a| \leqslant h$ булса, якынчалыкның абсолют хатасы h тан зур түгел яки x саны h ка кадәр төгәллек белән a санына тигез, диләр.

сорау ?! җавап

Ни өчен саннарның якынча кыйммәтләрен таба белергә кирәк икән? Чөнки чиксез унарлы вакланмалар белән эш итү һәм аларны зурлыкларны үлчәү өчен куллану бөтенләй дә мөмкин түгел. Тормышта бик күп очракларда төгәл кыйммәтләр урынына алдан бирелгән төгәллек

(хата) белән якынча кыйммәтләрне алалар. Бу инде калькуляторга да салынган, чөнки аларның дисплеенда чикле унарлы вакланма, ягъни санның экранга чыккан якынча кыйммәте күренә (экрандагы сан аңа сыя торган чикле унарлы вакланма очрагын исәпкә алмаганда).

§ 36. УҢАЙ САННЫҢ СТАНДАРТ РӘВЕШЕ

Без алда әйтеп киттек, тормышта исәпләүләр өчен чикле унарлы вакланмалардан файдаланалар; алар зурлыкларның йә төгәл, йә якынча кыйммәтләре булып тора. Шул ук вакытта, исәпләүләрне уңайлаштыру максатында, чикле унарлы уңай вакланманы кайвакыт стандарт рәвешкә китерәләр. Бу ни дигән сүз? Хәзер берничә мисал карыйк.

1. $a_1 = 274{,}35$ санын $2{,}7435 \cdot 10^2$ дип язарга мөмкин.
2. $a_2 = 5434$ санын $5{,}434 \cdot 10^3$ дип язарга мөмкин.
3. $a_3 = 0{,}273$ санын $2{,}73 \cdot 0{,}1 = 2{,}73 \cdot 10^{-1}$ дип язарга мөмкин.
4. $a_4 = 0{,}0013$ санын $1{,}3 \cdot 0{,}001 = 1{,}3 \cdot 10^{-3}$ дип язарга мөмкин.
5. $a_5 = 3{,}62$ санын $3{,}62 \cdot 10^0$ дип язарга мөмкин.

Барлык очракларда да без бирелгән уңай a_k санын ике тапкырлаучының тапкырчыгышы рәвешендә күрсәттек. Беренче тапкырлаучы — өтергә кадәр бер цифры (0 булмаган) булган сан, ягъни бөтен өлеше — бербуынлы сан (1 дән 9 га кадәр). Икенче тапкырлаучы итеп бөтен дәрәҗәдәге 10 саны алынды.

санның стандарт рәвеше

санның тәртибе

Билгеләмә. **Уңай *a* санының стандарт рәвеше** дип аның $a_0 \cdot 10^m$ рәвешендә бирелешен атыйлар, биредә $1 \leqslant a_0 < 10$, ә m — бөтен сан; m саны ***a* санының тәртибе** дип атала.

Үзебез тикшергән мисалларда:

1) 274,35 санының тәртибе 2 гә тигез;

2) 5434 санының тәртибе 3 кә тигез;

3) 0,273 санының тәртибе −1 гә тигез;
4) 0,0013 санының тәртибе −3 кә тигез;
5) 3,62 санының тәртибе 0 гә тигез.

Исәпләүләр өчен кайвакыт санның стандарт рәвешенә күчәләр.

Мисал. Исәпләргә:

а) $2734 \cdot 0{,}007$; б) $24{,}377 : 0{,}22$; в) $(0{,}0043)^2$.

Чишү. а) $2734 \cdot 0{,}007 = (2{,}734 \cdot 10^3) \cdot (7 \cdot 10^{-3}) =$
$= (2{,}734 \cdot 7) \cdot (10^3 \cdot 10^{-3}) = 19{,}138 \cdot 10^0 = 19{,}138 \cdot 1 = 19{,}138$;

б) $24{,}377 : 0{,}22 = (2{,}4377 \cdot 10) : (2{,}2 \cdot 10^{-1}) =$
$= (2{,}4377 : 2{,}2) \cdot (10 : 10^{-1}) = 1{,}10805 \cdot 10^{1-(-1)} =$
$= 1{,}10805 \cdot 100 = 110{,}805$;

в) $(0{,}0043)^2 = (4{,}3 \cdot 10^{-3})^2 = 4{,}3^2 \cdot (10^{-3})^2 = 18{,}49 \cdot 10^{-6} =$
$= 1{,}849 \cdot 10 \cdot 10^{-6} = 1{,}849 \cdot 10^{-5} = 0{,}00001849$. ◼

Ләкин санны стандарт рәвештә язуның төп файдасы менә нәрсәдә: күз алдына китерегез, сез йә бик зур, йә бик кечкенә уңай саннар белән исәпләүләр эшләдегез ди. Сезгә, мәсәлән, $a = 217\,000\,000\,000$ һәм $b = 0{,}0000045412$ саннарын калькулятор экранына чыгарырга һәм әле аларны тапкырларга кирәк ди. Ә экранга бары 8 тамга гына сыя. Менә шул вакытта саннарның стандарт язылышы кирәк була да инде. Язабыз: $a = 2{,}17 \cdot 10^{11}$; $b = 4{,}5412 \cdot 10^{-6}$, ул вакытта

$$a \cdot b = 2{,}17 \cdot 10^{11} \cdot 4{,}5412 \cdot 10^{-6} = 9{,}854404 \cdot 10^5 = 985\,440{,}4.$$

Төп нәтиҗәләр

Бу бүлектә сез математика теленең яңа атамалары белән таныштыгыз:
сызыкча тигезсезлек, квадрат тигезсезлек;
тигезсезлекне чишү;
тигезкөчле тигезсезлекләр, тигезсезлекне тигезкөчле рәвешүзгәртү;

ике санның арифметик уртасы, геометрик уртасы;
бер үк мәгънәле тигезсезлекләр, капма-каршы мәгънәле тигезсезлекләр;
санның киме буенча, артыгы буенча якынча кыйммәте; санны түгәрәкләү;
якынчалык хатасы (төгәллеге);
уңай санның стандарт рәвеше;
санның тәртибе.

Сез санлы тигезсезлекләрнең үзлекләре белән таныштыгыз:
әгәр $a > b, b > c$ булса, $a > c$;
әгәр $a > b$ булса, $a + c > b + c$;
әгәр $a > b, m > 0$ булса, $am > bm$;
әгәр $a > b, m < 0$ булса, $am < bm$;
әгәр $a > b$ булса, $-a < -b$;
әгәр $a > b, c > d$ булса, $a + c > b + d$;
әгәр $a > b > 0, c > d > 0$ булса, $ac > bd$;
әгәр $a > b \geqslant 0, n \in N$ булса, $a^n > b^n$;
әгәр $a > b > 0$ булса, $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

Без бер билгесезле тигезсезлекләр чишүнең (тигезсезлекләрне тигезкөчле рәвешүзгәртүләрнең) берничә кагыйдәсен өйрәндек.

Ниһаять, без квадрат тигезсезлекләр чишүнең алгоритмын төзедек.

ЭЧТӘЛЕК

Укытучы өчен кереш сүз 3

1 бүлек. АЛГЕБРАИК ВАКЛАНМАЛАР

§ 1. Төп төшенчәләр 7
§ 2. Алгебраик вакланманың төп үзлеге 10
§ 3. Ваклаучылары бертөрле булган алгебраик вакланмаларны кушу һәм алу 13
§ 4. Ваклаучылары төрле булган алгебраик вакланмаларны кушу һәм алу 15
§ 5. Алгебраик вакланмаларны тапкырлау һәм бүлү. Алгебраик вакланманы дәрәҗәгә күтәрү 21
§ 6. Рациональ аңлатмаларны рәвешүзгәртү 23
§ 7. Рациональ тигезләмәләр чишү турында беренче күзаллаулар 26
§ 8. Тискәре бөтен күрсәткечле дәрәҗә 30
Төп нәтиҗәләр 33

2 бүлек. $y = \sqrt{x}$ ФУНКЦИЯСЕ. КВАДРАТ ТАМЫРНЫҢ ҮЗЛЕКЛӘРЕ

§ 9. Рациональ саннар 35
§ 10. Тискәре булмаган саннан квадрат тамыр төшенчәсе 41
§ 11. Иррациональ саннар 49
§ 12. Реаль саннар күплеге 52
§ 13. $y = \sqrt{x}$ функциясе, аның үзлекләре һәм графигы 56
§ 14. Квадрат тамырларның үзлекләре 66
§ 15. Квадрат тамыр гамәле кергән аңлатмаларны рәвешүзгәртү 71
§ 16. Реаль санның модуле 76
Төп нәтиҗәләр 82

3 бүлек. КВАДРАТИК ФУНКЦИЯ. $y = \frac{k}{x}$ ФУНКЦИЯСЕ

§ 17. $y = kx^2$ функциясе, аның үзлекләре һәм графигы 84
§ 18. $y = \frac{k}{x}$ функциясе, аның үзлекләре һәм графигы. 96
§ 19. Әгәр $y = f(x)$ функциясенең графигы билгеле булса, $y = f(x + l)$ функциясенең графигын ничек төзергә . . . 107
§ 20. Әгәр $y = f(x)$ функциясенең графигы билгеле булса, $y = f(x) + m$ функциясенең графигын ничек төзергә. . . 110
§ 21. Әгәр $y = f(x)$ функциясенең графигы билгеле булса, $y = f(x + l) + m$ функциясенең графигын ничек төзергә . . 115
§ 22. $y = ax^2 + bx + c$ функциясе, аның үзлекләре һәм графигы . . 120
§ 23. Квадрат тигезләмәләрне график юл белән чишү 127
Төп нәтиҗәләр 131

4 бүлек. КВАДРАТ ТИГЕЗЛӘМӘЛӘР

§ 24. Төп төшенчәләр. 133
§ 25. Квадрат тигезләмәләрнең тамырлары формулалары 138
§ 26. Рациональ тигезләмәләр. 147
§ 27. Реаль хәлләрнең математик модельләре буларак, рациональ тигезләмәләр. 153
§ 28. Квадрат тигезләмә тамырларының тагын бер формуласы 165
§ 29. Виет теоремасы 168
§ 30*. Иррациональ тигезләмәләр. 174
Төп төшенчәләр 181

5 бүлек. ТИГЕЗСЕЗЛЕКЛӘР

§ 31. Санлы тигезсезлекләрнең үзлекләре. 183
§ 32. Функцияләрне монотонлыкка тикшерү 190
§ 33. Сызыкча тигезсезлекләр чишү 196
§ 34. Квадрат тигезсезлекләр чишү. 200
§ 35. Реаль саннарның якынча кыйммәтләре 207
§ 36. Уңай санның стандарт рәвеше 211
Төп нәтиҗәләр 212

Учебное издание

Мордкович Александр Григорьевич

АЛГЕБРА

8 класс

В двух частях

Часть 1

УЧЕБНИК

для учащихся общеобразовательных учреждений

(Перевод с русского на татарский язык)

Редакторы *Ф.Ш.Шәкүрова*
Корректоры *Э.Ш.Рәхмәтуллина*
Компьютерда битләргә салучысы *В.М.Садыйкова*

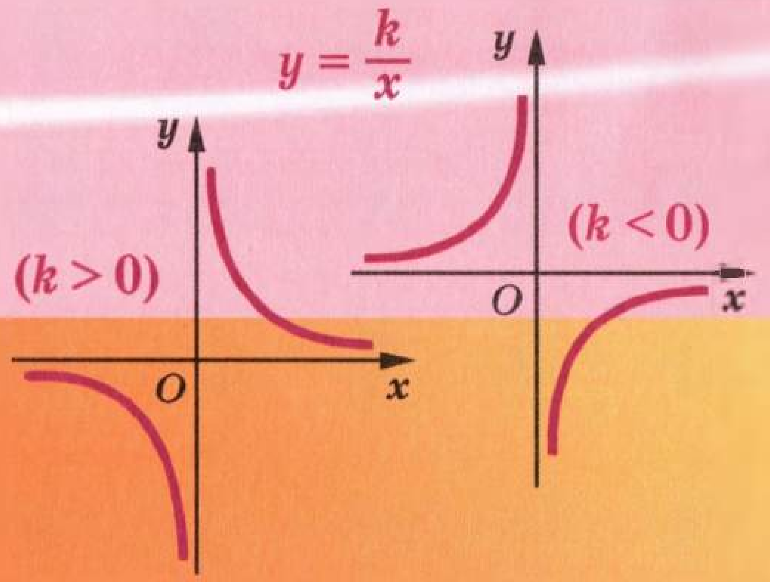
Оригинал макеттан басарга кул куелды 20.06.2013.
Форматы 60x90 1/16. Офсет кәгазе. «Школьная» гарнитурасы.
Офсет басма. Басма табагы 13,5. Тиражы 2030 д.
Заказ С-1533.

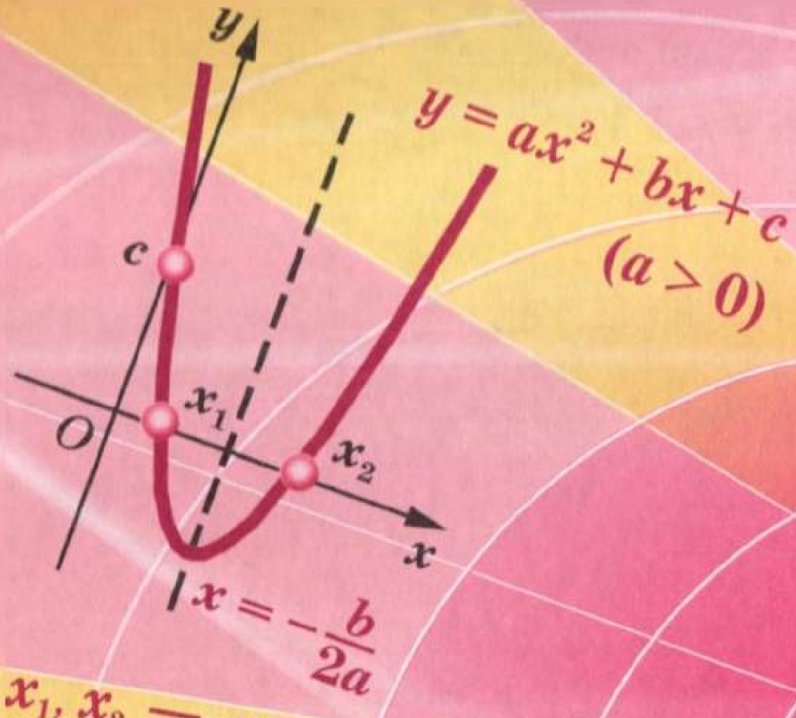
420111. Казан, Тельман ур., 5.
Хатлар өчен: 420014. Казан, Кремль, а/я 54.
Тел. (843)264-67-96.

«Татмедиа» ААҖ филиалы —
«Идел-ПРЕСС» полиграфия-нәшрият комплексы.
420066. Казан, Декабристлар урамы, 2.

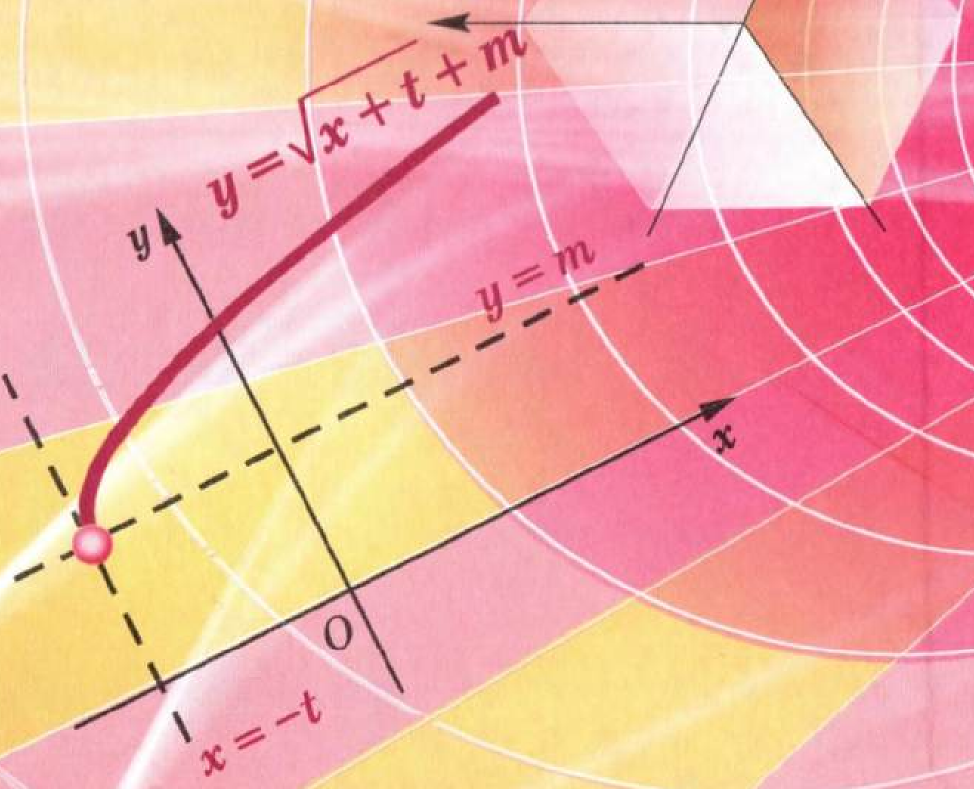
ИКЕУРЫНЛЫ САННАРНЫҢ КВАДРАТЛАРЫ ТАБЛИЦАСЫ

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	121	144	169	196	225	256	289	324	361
2	441	484	529	576	625	676	729	784	841
3	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521
4	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401
5	2601	2704	2809	2916	3025	3136	3249	3364	3481
6	3721	3844	3969	4096	4225	4356	4489	4624	4761
7	5041	5184	5329	5476	5625	5776	5929	6084	6241
8	6561	6724	6889	7056	7225	7396	7569	7744	7921
9	8281	8464	8649	8836	9025	9216	9409	9604	9801

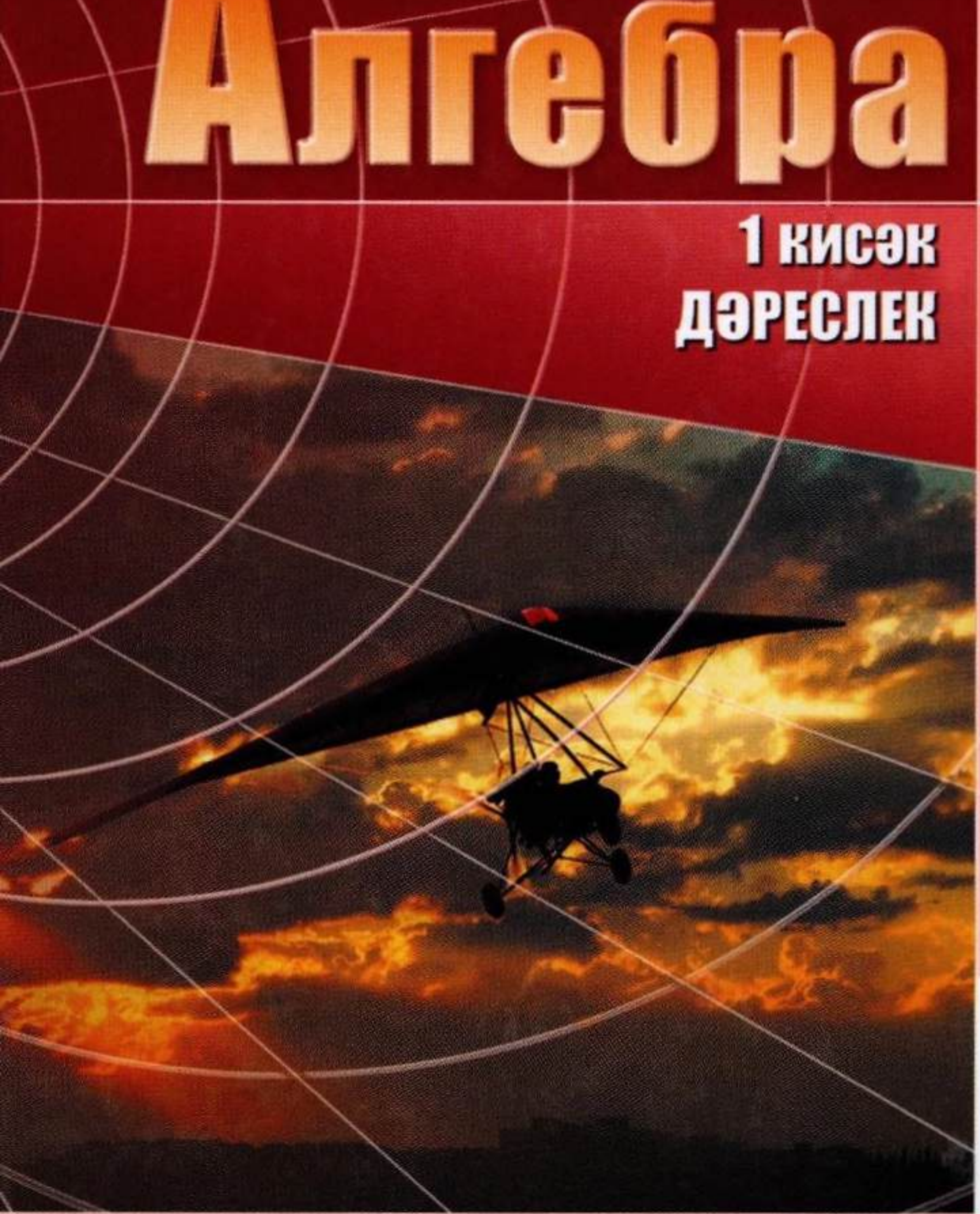




x_1, x_2 — тигезләмә тамырлары
$ax^2 + bx + c = 0$



Алгебра

1 кисәк
дәреслек

8